



کمانش (ناپایداری)

هدف آزمایش: بررسی پدیده کمانش در تیرهای طویل با مقطع باریک تحت تاثیر نیروی فشاری.

با توجه به اینکه برای نیروهای فشاری قبل از آن که معیار شکست برای آنها مطرح باشد تغییر شکل قائم تیرها در طراحی حائز اهمیت است.

توضیح مختصر روش انجام آزمایش:

آزمایش روی تیرهای فولادی، برنجی و چوبی انجام می‌شود. بعد از اینکه با کولیس ضخامت و پهنای تیرها خوانده می‌شود با خط کش طول تیرها را نیز یادداشت کرده و هر کدام از تیرها در سه مرحله مورد آزمایش قرار می‌گیرد. (دوسرمفصل. یک سرلولا- یک سرگیردار و دو سرگیردار)

وقتی تیر را بین دو فک دستگاه قرار می‌دهیم یکی از فک‌ها ثابت و دیگری متحرک است. وقتی فک را محکم می‌کنیم با خط مشکی وسط تیر را پیدا می‌کنیم. و کرنش سنج را در وسط تیر قرار داده و کرنش سنج را روی صفر تنظیم می‌کنیم و پس از آن نیروی فشاری را که توسط یک جک هیدرولیکی وارد می‌شود افزایش می‌دهیم و اعداد را از روی کرنش سنج که بر حسب صدم میلی متر است می‌خوانیم و این آزمایش را برای هر متر در سه حالت انجام می‌دهیم.

سوال: اولین مد تغییر شکل برای معیار طراحی کافیت (چرا)؟

ج: چون وقتی که P به P_{cr} بحرانی می‌رسد: فرض می‌کنیم مد اول کمانش در تیر صورت گیرد. واگر مد اول کمانش در تیر رخ ندهد در مد دوم که n مساوی ۲ خواهد بود. کمانش رخ خواهد داد. که شکل تغییر شکل به صورت سینوسی می‌باشد. و این ریسک را نمی‌کنیم که تغییر شکل در مد دوم رخ دهد و همان مد اول را در نظر می‌گیریم

سوال ۱ چرا برای معادله دیفرانسیل فوق جواب یکتایی برای y نداریم؟

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0 \quad \text{در معادله}$$

که جواب خطی $y = A \sin px + B \cos px^l$ را دارد چون نوع اتصالها فرق می‌کند و ممکن است دو سر مفصل باشد یا دو سرگیردار و یا یک سرگیردار و یک سر مفصل که در هر کدام از اینها طول موثر تغییر می‌کند و با تغییر کردن طول موثر نیروی P نیز تغییر خواهد کرد و همان طور که مشاهده می‌شود و معادله ۶ اگر P تغییر کند y نیز تغییر خواهد کرد. بنابراین جواب یکتایی برای y بدست نمی‌آید.

$$\text{سوال ۲: رابطه } y_{\max} e = \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{f}{2} - 1 \right) \right] \text{ را ثابت کنید.}$$



$$x = -P_Y - M_A = -P_y - P_e$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} y - \frac{Pe}{EI}$$

$$\rightarrow P^2 = \frac{P}{EI}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = -P^2 e \quad (I)$$

می توان حل عمومی معادله I را بصورت زیر نوشت:

$$y = A \sin px + B \cos px - e$$

ثابت‌های A و B از شرایط مرزی پیدا می شود:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow B=e, \quad \begin{cases} x=l \\ y=0 \end{cases} \rightarrow A \sin pl = e(1 - \cos pf)$$

$$\sin pf = 2 \sin \frac{pl}{2} \cos \frac{pl}{2} \quad \text{و داریم}$$

$$1 - \cos pl = 2 \sin^2 \frac{pl}{2} \quad A = e \tan \frac{pl}{2}$$

$$\rightarrow y = e \left(\tan \frac{pl}{2} \sin px + \cos px - 1 \right)$$

با قرار دادن در $x = \frac{l}{2}$ مقدار خیز ماکزیم بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} y_{\max} &= e \left(\tan \frac{pl}{2} \sin \frac{pl}{2} + \cos \frac{pl}{2} - 1 \right) \\ &= e \left(\frac{\sin^2 \frac{pl}{2} + \cos^2 \frac{pl}{2}}{\cos \frac{pl}{2}} - 1 \right) \rightarrow y_{\max} = e \left(\sec \frac{pl}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

با توجه به معادله $p^2 = \frac{P}{EI}$ خواهیم داشت.

$$y_{\max} = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{f}{2} \right) - 1 \right]$$

آزمایش ۱: هدف: بدست آوردن EI از طریق تجربی

سوال ۳: رابطه بین تغییر مکان ماکزیمم و نیروی اعمالی برای تیر فوق را بدست آورده و از آنجا EI را محاسبه و با مقدار تئوری مقایسه کنید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} y \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0$$

$$y = A \sin px + B \cos px, \quad p^2 = \frac{P}{EI} \rightarrow (x=0, x=L) \rightarrow (y=0)$$

$$A \sin pl = 0 \rightarrow PL = n\pi \rightarrow p = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \rightarrow p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2} \text{ برای دو سر گیردار} \quad p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} \text{ برای یک سر مفصل، یک سر گیردار}$$

برای تیر فولادی:

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi} \Rightarrow E = \frac{30 \times 10^6}{145} = 206896.5 \text{ Mpa}$$

در حالت دو سر مفصل برای تیر فولادی کرنش سنج نیروی بحرانی برای این تیر در حالت دو سر مفصل 160 نیوتن می باشد.

$$EI = \frac{160 \times (0.74)^2}{\pi^2} = 8.87 \text{ از طریق تجربی}$$

$$I = \frac{1}{\pi} b h^3 = \frac{1}{12} \left(\frac{20}{1000} \right)^3 \left(\frac{4}{1000} \right)^2 = 2.66 \times 10^{-9}$$

$$\Rightarrow EI = 5.51$$

برای بقیه تیرها نیز برای حالت دو سر مفصل بدین صورت حساب می شود و خطایی که در حالت تئوری نسبت به تجربی مشاهده می شود به علت خطای اپراتور و خطای تعیین وسط تیر است.

$$E = 206896.5 \text{ برای تیر چوبی:}$$

در حالت دو سر مفصل

$$EI = \frac{200 \times (0.54)^2}{\pi^2} = 5.909 \text{ از طریق تجربی}$$

$$I = \frac{1}{12} \left(\frac{20}{1000} \right)^3 \left(\frac{6.2}{1000} \right)^2 = 4.133 \times 10^{-9}$$

$$\Rightarrow EI = 8.55 \times 10^{-4}$$



برای تیر برنجی در حالت دو سر مفصل :

$$EI = \frac{280 \times (0.74)^2}{\pi^2} = 15.53 \quad \text{از طریق تجربی}$$

$$I = \frac{1}{12} \left(\frac{19}{1000} \right)^3 \left(\frac{4.8}{1000} \right) = 2.7436 \times 10^{-9} \quad \text{از طریق تئوری}$$

$$\Rightarrow EI = 5.676 \times 10^{-4}$$

آزمایش ۱ :

هدف آزمایش : بدست آوردن نیروی بحرانی برای تیر دو سر گیردار

فرمول اولر برای ستونهایی که دو سر مفصل هستند.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = 0 \Rightarrow A \sin px + B \cos px$$

$$p = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \Leftarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=L \rightarrow y=0 \end{cases} \quad \text{با استفاده از شرایط مرزی}$$

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{کوچکترین مقدار از مقادیر بدست آمده برای } p \text{ عبارت است از } n=1 \text{ پس خواهیم داشت}$$

آزمایش ۳ : بدست آوردن نیروی بحرانی p_{cr} برای تیر یک سرگیردار، یک سر مفصل

روش محاسبه بار برای p_{cr} را برای ستونی که شرایط اتصال دو سر آن از نوع گیر است. مورد بحث قرار می دهیم.

در این حالت باید طول ستون را دو برابر طول واقعی را باشد. L قرار را داده می گوئیم که طول موثر (*effective – length*)

یا L_e یا معادل $2L$ است و پس $l_e = 2l$ را در فرمول اولر جاگذاری می نمائیم. $S_e = 2l$ برای حالت یک سر ثابت و سر

دیگر آزاد و برای حالت دو سرگیردار $l_e = 0.5l$ و برای حالت یک سر ثابت و یک سر مفصل $l_e = 0.7l$ بدست خواهد

آمد.



سوال ۴: محاسبه نیروی ماکزیمم (P_{max})

از روی منحنی

$$(P_{max}) = 180N$$

$$(P_{max}) = 140N$$

$$(P_{max}) = 250N$$

برای دو سر گیردار:

$$(P_{max}) = 600N$$

$$(P_{max}) = 900N$$

برای یک سر گیردار یک سر مفصل:

$$(P_{max}) = 450N$$

$$(P_{max}) = 300N$$

سوال ۵: چرا تغییرات نیروی فشاری P وقتی که Δy زیاد است. تقریباً ناچیز بوده و در واقع نیرو ثابت می ماند؟ و از آنجا پدیده Crippling را توضیح دهید.

در حالتی که Δy زیاد است. مانند این است که خروج از مرکز داریم و هر چه قدر این خروج از مرکز بیشتر باشد. لنگر وارد به دو انتهای تیر خیلی زیاد بوده و بیشتر از تحمل تیر است. علی رغم ثابت ماندن نیروی P تیر خود به خود خم شده و Δy زیاد می شود و در آخر سر، تیر به اصطلاح «چلاق» می شود. یا از هم می پاشد که این پدیده به (Crippling) معروف است.

سوال ۶: توضیح دهید چرا $P_{cr} = P_{max}$ است مقادیر تجربی و تئوری را برای هر یک از آزمایش های فوق بدست آورده و مقایسه کنید؟ درصد خطا را بدست آورده و عمل آن را بیان کنید؟

چون وقتی که L دنبال پیدا کردن نیروی P_{cr} هستیم در حقیقت می خواهیم نیروئی را پیدا کنیم که آخرین حد تحمل تیر است یا همان نیروی بحرانی تیر و اگر بیشتر موارد شود. تیر خواهد شکست پس می بینیم این نیرو همان نیروی ماکزیممی است که تیر می تواند تحمل نماید.

نیروی P_{cr} در دو سر مفصل چوبی

$$p_{cr} = 200N \text{ از طریق تجربی}$$



$$p_{cr} = \frac{\pi^2 \times 8.55}{0.75^2} = 150N \rightarrow \frac{200 - 150}{200} = 0.25 \rightarrow 25\%$$

دو سر مفصل:

$$p_{cr} = 160N$$

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 \times 5.51}{0.75^2} = 96.6N \rightarrow \frac{160 - 96.6}{160} = 0.39 \rightarrow 39\%$$

دو سر مفصل:

$$p_{cr} = 280N$$

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 \times 5.67}{0.75^2} = 99.48N \rightarrow \frac{299 - 260}{299} = 0.64 \rightarrow 64\%$$

