

## آنالیز و کنترل ارتعاشات خمشی محورهای ترکدار

دکتر مهدی بهزاد (دانشیار) دکتر علی مقداری (استاد)

علیرضا ابراهیمی (دانشجوی دکتری)

### چکیده

در این پروژه، ابتدا به تعیین معادلات دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی مربوطه برای ارتعاشات تیرهای ترکدار و ارائه مدلی پیوسته برای آن پرداخته می‌شود. به منظور ارائه چنین مدلی لازم است میدان تنش اطراف نوک ترک و انرژی کرنشی ذخیره شده در نوک ترک در معادلات حرکت تیر وارد گردند. به کمک این مدل می‌توان تغییر خواص ارتعاشی سیستم را که به واسطه وجود و رشد ترک بوجود آمده است تشخیص داد. درستی این مدل با مقایسه با نتایج مدل‌های اجزاء محدود و تست‌های عملی برآورد خواهد گردید. در ادامه نتایج بدست آمده در مورد تیرهای ترکدار به محورهای ترکدار با استفاده از یک سیستم مختصات دوار تعمیم داده خواهد شد. گام بعدی کنترل یک روتور ترکدار به کمک محرک‌های فعال به هنگام پروسه توقف روتور و جلوگیری از تخریب آن در طی این فرایند است. محرک‌های فعال می‌توانند از نوع یاتاقانهای الکترومغناطیس باشند. بدست آوردن دینامیک سیستم و ارائه یک الگوریتم کنترلی که هدف آن کمینه کردن دامنه ارتعاشات روتور در حین پروسه توقف است در افق دید این پروژه قرار دارد.

### کلمات کلیدی:

روتور - ترک - ارتعاشات - کنترل

### مقدمه:

یکی از مشکلات مهم در تیرها و محورها گسترش ترک در مقاطع آنها است که این ترکها اغلب به واسطه خستگی بوجود می‌آیند. این ترکها یکی از مهمترین عوامل بروز خرابیها در ماشینها هستند. وجود ترک سبب تغییر مشخصه‌های ارتعاشی می‌شود و محققان دریافته‌اند که اغلب دامنه این ارتعاشات ساختارهای ترکدار، بستگی به عمق و شکل و موقعیت ترک نسبت به شکل مودهای سیستم دارد. پس یک تحقیق جامع و دقیق در مورد ارتعاشات ساختارهای ترک دار برای سیستم تشخیص خرابی بسیار ضروری است و بسیار مهم است که به سرعت، این عیب را تشخیص داده و تعمیرات لازم را بر روی مجموعه انجام دهیم تا تخریب بیشتری به سبب ارتعاشات غیر مجاز بوجود نیاید.

هدف این پروژه، تعیین معادلات دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی مربوطه برای ارتعاشات تیرهای ترکدار و ارائه مدلی پیوسته برای آن است. به منظور ارائه چنین مدل پیوسته‌ای از یک تیر ترکدار لازم است میدان تنش اطراف نوک ترک و انرژی کرنشی ذخیره شده در نوک ترک در معادلات حرکت تیر وارد گردند. به کمک این مدل می‌توان تغییر خواص ارتعاشی سیستم را که به

واسطه وجود و رشد ترک بوجود آمده است تشخیص داد. درستی این مدل با مقایسه با نتایج مدل‌های اجزاء محدود و تستهای عملی برآورد خواهد گردید.

در ادامه نتایج بدست آمده در مورد تیرهای ترکدار به محورهای ترکدار با استفاده از یک سیستم مختصات دوار تعمیم داده خواهد شد. در این مرحله سعی می‌شود الگوریتمی برای تشخیص وجود ترک و محل آن و میزان پیشرفت ترک ارائه گردد. روشهای موجود برای ارائه چنین الگوریتمی، بررسی پاسخ فرکانسی این روتورها و آنالیز آن و یا استفاده از اربیت محور دوار است.

گام بعدی کنترل یک روتور ترکدار به کمک محرکهای فعال به هنگام پروسه توقف روتور و جلوگیری از تخریب آن در طی این فرایند است. محرکهای فعال می‌توانند از نوع یاتاقانهای الکترومغناطیس باشند. بدست آوردن دینامیک سیستم و ارائه یک الگوریتم کنترلی که هدف آن کمینه کردن دامنه ارتعاشات روتور در حین پروسه توقف است در افق دید این پروژه قرار دارد.

### برنامه زمانبندی:

برنامه زمانبندی انجام این پروژه در قالب یک طرح ۲۴ ماهه در جدول زیر خلاصه شده است. زمان آغاز پروژه مهرماه ۸۴ می‌باشد.

جدول (۱) برنامه زمانبندی انجام رساله

| شرح فعالیت                                                                     |  | سه ماهه اول | سه ماهه دوم | سه ماهه سوم | سه ماهه چهارم | سه ماهه پنجم | سه ماهه ششم | سه ماهه هفتم | سه ماهه هشتم |
|--------------------------------------------------------------------------------|--|-------------|-------------|-------------|---------------|--------------|-------------|--------------|--------------|
| ۱- انجام مطالعات مقدماتی و فراهم آوردن پیش زمینه‌های علمی مربوط به انجام رساله |  |             |             |             |               |              |             |              |              |
| ۲- تعیین معادلات دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی مناسب برای یک تیر ترکدار          |  |             |             |             |               |              |             |              |              |
| ۳- حل عددی معادلات بدست آمده                                                   |  |             |             |             |               |              |             |              |              |
| ۴- ساخت مدل اجزاء محدود و بررسی صحت نتایج بدست آمده*                           |  |             |             |             |               |              |             |              |              |
| ۵- بازنویسی معادلات برای تیر با مقطع دایروی                                    |  |             |             |             |               |              |             |              |              |
| ۶- استخراج معادلات حرکت برای محور دوار ترکدار                                  |  |             |             |             |               |              |             |              |              |
| ۷- حل عددی معادلات بدست آمده*                                                  |  |             |             |             |               |              |             |              |              |
| ۸- ارائه مدلی برای محور ترکدار بر روی یاتاقانهای مغناطیس                       |  |             |             |             |               |              |             |              |              |
| ۹- ساده‌سازی مدل و انتخاب شیوه کنترلی مناسب                                    |  |             |             |             |               |              |             |              |              |
| ۱۰- انجام فرایند کنترل*                                                        |  |             |             |             |               |              |             |              |              |
| ۱۱- تدوین رساله                                                                |  |             |             |             |               |              |             |              |              |

\* در این مراحل می‌توان مقاله علمی تهیه و برای کنفرانس و یا ژورنال معتبر ارسال نمود

### فعالیت‌های انجام شده تا کنون:

در حال حاضر (تیرماه ۱۳۸۵) بخش‌های ۱ تا ۵ از برنامه زمانبندی فوق تقریباً به انجام رسیده است. پس از انجام مطالعات اولیه و جمع‌آوری مستندات لازم ارتعاشات یک تیر ترکدار مورد بررسی قرار گرفته است. در این مرحله معادلات دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی مناسب برای یک تیر ترکدار با فرض مدل ترک پیوسته استخراج گردیده است. ترک بصورت یک تابع اغتشاش در میدان جابجایی تیر مدل شده و با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت از روی میدان جابجایی استخراج گردیده است. ثوابت بکار رفته در میدان جابجایی فرض شده با استفاده از شیوه‌های موجود در مکانیک شکست استخراج شده است. در مرحله بعد معادلات بدست آمده بصورت عددی حل شده و پارامترهای مودال استخراج گردیده است. سپس به منظور برآورد درستی مدل استخراج شده از تیر ترکدار یک مدل اجزاء محدود ساده از این تیر ساخته شده و نتایج حل تحلیلی و حل اجزاء محدود با یکدیگر مقایسه شده و صحت نتایج بدست آمده تأیید گردیده است.

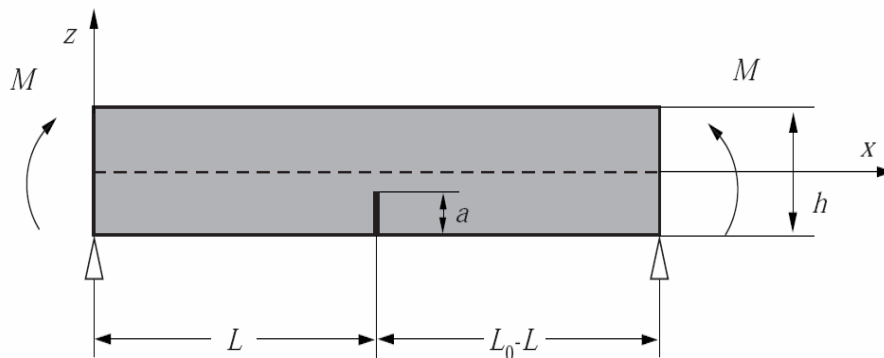
در حال حاضر مدل ساخته شده در حال بهینه سازی و بهبود است تا بصورت کامل برای بخش بعد آماده گردد. در بخش‌های بعدی این گزارش خلاصه‌ای از قسمت‌های به انجام رسیده در این پایان نامه ارائه می‌گردد.

### معادلات حرکت یک تیر اویلر برنولی

یک تیر اویلر برنولی منشوری یکنواخت با یک ترک عرضی لبه‌ای که دارای تکیه گاه‌های ساده است و تنها تحت اثر خمش محض قرار دارد، در شکل (۱) نشان داده شده است. برای بدست آوردن معادلات حرکت این تیر، فرض می‌کنیم که  $u_i$ ، مؤلفه‌های جابجایی و  $\gamma_{ij}$ ، مؤلفه‌های کرنش در هر نقطه، متناظر با تنش  $\sigma_{ij}$  در آن نقطه باشند که  $i, j=1, 2, 3$  متناظر با مختصات کارتزین  $x, y$  و  $z$  هستند. علاوه بر این فرض می‌کنیم که  $p_i$ ها مؤلفه‌های مومنتوم باشند، به گونه‌ای که  $T_m = \frac{1}{2} \rho \delta_{ij} p_i p_j$  دانسیته انرژی جنبشی و  $\delta_{ij}$ ، دلتای کرونیگر باشد. برای تغییرات دلخواه و غیر وابسته  $\delta u_i$ ،  $\delta \gamma_{ij}$ ،  $\delta \sigma_{ij}$  و  $\delta p_i$  آنگونه که در مرجع [۲] آمده است، برای ارتعاشات یک تیر اویلر برنولی داریم:

$$\int_V \{ [\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \dot{p}_i] \delta u_i + [\sigma_{ij} - W_{,\gamma_{ij}}] \delta \gamma_{ij} + [\gamma_{ij} - (1 - \frac{1}{2} \delta_{ij})(u_{i,j} + u_{j,i})] \delta \sigma_{ij} + [\rho \dot{u}_i - T_{m,p_i}] \delta p_i \} dV + \int_{S_g} [\bar{g}_i - g_i] \delta u_i dS + \int_{S_u} [u_i - \bar{u}_i] \delta g_i dS = 0 \quad (1)$$

که در آن،  $W(\gamma_{ij})$ ، تابع دانسیته انرژی کرنشی و  $\rho$  چگالی ماده است.  $F_i$ ،  $g_i$  و  $u_i$ ، به ترتیب، نیروهای جسمی، کشش سطحی و جابجاییهای سطحی هستند. علاوه بر این،  $V$ ، حجم جامد و  $S_g$  و  $S_u$ ، سطوح خارجی هستند. مقادیر کشش سطحی و جابجایی که با یک خط در بالای آنها (بار) نشان داده شده‌اند، مقادیر از پیش تعیین شده هستند. با توجه داشت که کشش سطحی معین  $g_i$  بر روی سطح  $S_g$  اعمال می‌شود و جابجاییهای معین  $u_i$ ، بر روی سطح  $S_u$ ، صورت می‌پذیرد. مجموعه  $S_g$  و  $S_u$ ، کل سطح جامد را تشکیل می‌دهد.



شکل (۱) هندسه یک تیر اویلر برنولی منشوری با تکیه گاههای ساده که دارای یک ترک عرضی لبه ای است.

برای بدست آوردن معادلات حرکت و شرایط مرزی در ارتعاشات عرضی یک تیر ترکدار، با استفاده از تئوری ارتعاشات و معادله (۱)، فرض می کنیم که محور  $x$ ، خط مرکزی تیر و صفحه  $yz$ ، صفحه سطح مقطع آن باشد. برای یک تیر اویلر برنولی، در غیاب ترک، میدان جابجایی عبارتست از [۲]:

$$u_1 = -zw' \quad u_2 = 0 \quad u_3 = w(x, t) \quad (2)$$

میدان کرنش نیز بصورت زیر خواهد بود:

$$\gamma_{xx} = -zS(x, t) \quad \gamma_{yy} = \gamma_{zz} = -V\gamma_{xx} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (3)$$

که در آن،  $V$ ، ضریب پواسون است. فرض انجام شده برای  $\gamma_{yy}$ ،  $\gamma_{zz}$ ، اجازه می دهد تا خم anticlastic آزادانه صورت پذیرد. میدان تنش به گونه ای فرض می شود که تنش در امتداد محور تیر بصورت زیر باشد:

$$\sigma_{xx} = -zT(x, t) \quad (4)$$

تنها تنش غیر صفر دیگر،  $\sigma_{xz}$  است که به واسطه بارگذاری عرضی بر روی تیر، ایجاد شده است. از اینرسی دورانی یا طولی و تغییر شکلهای برشی (عبارت  $p_x$ ) صرف نظر می شود. همچنین اینرسی عرضی متناظر با تغییر شکل ناشی از خم anticlastic (عبارت  $p_y$ ) نیز صفر فرض می شود. بنابراین میدان مومنتوم بصورت زیر فرض می شود:

$$p_x = p_y = 0 \quad p_z = P(x, t) \quad (5)$$

در یک تیر ترکدار، بواسطه وجود ترک توزیع میدانهای جابجایی، تنش و کرنش، با یک تیر بدون ترک متفاوت است. این تفاوت در این نوشتار با یک تابع اغتشاشات ترک یعنی  $f(x, z)$  معرفی می گردد.

برای یک تیر یکنواخت در غیاب نیروهای جسمی، آنگونه که در مرجع [۲] آمده است، با معرفی یک تابع اغتشاشات ترک، معادلات قبلی به صورت زیر تغییر می کنند:

$$\begin{aligned} u &= -z\{[1 + f(x, z)]w(x, t)\}', & v &= 0, & w &= [1 + f(x, z)]w(x, t), \\ p_x &= 0, & p_y &= 0, & p_z &= P(x, t), \\ \gamma_{xx} &= -zS(x, t), & \gamma_{yy} &= \gamma_{zz} = -v\gamma_{xx}, & \gamma_{xy} &= \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0, \\ \sigma_{xx} &= -zT(x, t), & \sigma_{xz} &= \sigma_{xz}(x, z, t), & \sigma_{xy} &= \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0, \\ F_x &= F_y = F_z = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن،  $u_1 = u$ ،  $u_2 = v$  و  $u_3 = w$  است. با جایگذاری معادلات (۶) در معادلات (۱)، و استفاده از روش بکار رفته در مرجع [۲]، با ساده سازی های مناسب و گرفتن انتگرالهای جزء به جزء مناسب، معادله حرکت تیر ترکدار بصورت زیر بدست می آید:

$$E[(I - I_2)(Q_1 w'' + Q_2 w' + Q_3 w)]'' + \rho I_7 \dot{w} = 0. \quad (7)$$

که در آن داریم:

$$Q_1(x) = I_6/(I - 2I_2), \quad Q_2(x) = 2I_5/(I - 2I_2), \quad Q_3(x) = I_4/(I - 2I_2) \quad (8)$$

و نیز داریم:

$$\begin{aligned} I &= \int_A z^2 dA & I_2 &= \int_A z dA & I_4 &= \int_A z^2 f'' dA \\ I_5 &= \int_A z^2 f' dA & I_6 &= \int_A z^2 (1 + f) f dA & I_7 &= \int_A (1 + f(x, z)) dA \end{aligned} \quad (9)$$

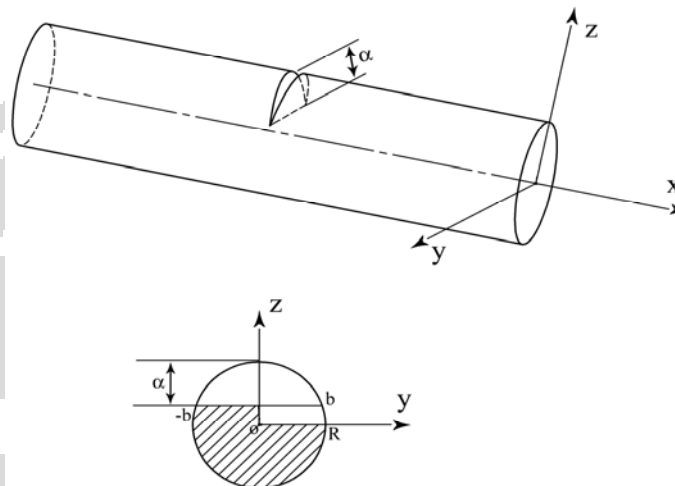
شرایط مرزی نیز از این مروش قابل استخراج است که برای یک تیر با تکیه گاههای ساده، شرایط مرزی عادی برقرار است. یعنی داریم:

$$w|_{x=0} = 0, \quad \partial^2 w / \partial x^2|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=L_0} = 0, \quad \partial^2 w / \partial x^2|_{x=L_0} = 0. \quad (10)$$

به سادگی می توان نشان داد که اگر ترک را حذف کرده و پارامترهای مربوط به آن را صفر قرار دهیم، این معادلات منجر به همان معادلات تیر اوپلر برنولی آشنا خواهند شد.

## تابع اغتشاشات ترک

برای بررسی و مطالعه معادله حرکت بدست آمده در بخش قبل، یک تیر استوانه‌ای ترکدار بطول  $L_0$  که دارای یک ترک لبه‌ای در فاصله  $L$  از ابتدای تیر است و در هر دو سمت با تکیه گاههای ساده مهار شده است و تحت اثر یک ممان خمشی محض  $M$  قرار دارد، مطابق شکل (۱) در نظر می‌گیریم. شعاع مقطع این تیر،  $R$ ، فرض می‌شود. نمایی دیگر از این تیر به همراه سطح مقطع آن در شکل (۲) ملاحظه می‌شود.



شکل (۲) یک تیر استوانه‌ای ترکدار به همراه مقطع آن

تحت یک بارگذاری عمومی، جابجایی‌های اضافی  $u^*$ ،  $w^*$  و  $\theta^*$  بواسطه وجود ترک در نقاط مختلف تیر بوجود می‌آید. اگر تیر تنها تحت اثر یک ممان خمشی محض،  $M$ ، باشد، با استفاده از تئوری کاستیگلیانو می‌توان چرخش اضافی  $\theta^*$  را از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\theta^* = \partial U_T / \partial M \quad (11)$$

انرژی کرنشی بکار رفته در رابطه فوق نیز در واقع انرژی کرنشی ناشی از ترک است و برای محاسبه آن باید از دانسیته انرژی کرنشی در نقاط مختلف ترک بر روی کل ترک انتگرال گیری نمود. لذا داریم:

$$U_T = \int_{CRACK} J(\alpha) d\alpha \quad (12)$$

این معادله به معادله Paris [۶] معروف است. انتگرال نوشته شده، در واقع یک انتگرال روی سطح است که مطابق روش بکار رفته در مرجع [۵]، می‌توان آنرا بصورت زیر نیز نوشت:

$$U_T = \int_{-b}^b \int_0^\alpha J_s(\alpha) d\alpha dy \quad (۱۳)$$

که  $\alpha$  در این رابطه عمق ترک است.  $J_s$  نیز، دانسیته انرژی کرنشی است که از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$J_s = \frac{1}{E'} \left[ \left( \sum_{i=1}^6 K_{Ii} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^6 K_{IIIi} \right)^2 + m \left( \sum_{i=1}^6 K_{IIi} \right)^2 \right] \quad (۱۴)$$

که در این رابطه، اگر فرض تنش صفحه‌ای صورت پذیرد،  $E' = E$  و اگر فرض کرنش صفحه‌ای مد نظر قرار گیرد،  $E' = E/(1-\nu)$  خواهد بود که در این نوشتار، فرض کرنش صفحه‌ای بکار رفته است.  $m = 1 + \nu$  است و  $K_{Ii}, K_{IIi}, K_{IIIi}$ ، فاکتورهای شدت تنش متناظر با سه مود شکست هستند که در اثر بارگذاری اولیه  $i$ ام بوجود آمده‌اند. در مکانیک شکست، فاکتورهای تمرکز تنش برای یک نوار یا یک نمونه با سطح مقطع مستطیلی که دارای یک ترک عرضی لبه‌ای است، با حل دقیق قابل محاسبه است. اما کاربرد مستقیم مکانیک شکست، نمی‌تواند حل دقیقی برای فاکتورهای تمرکز تنش برای یک نمونه استوانه‌ای با یک ترک لبه‌ای بدست دهد. برای محاسبه فاکتورهای تمرکز تنش در این حالت فرض می‌کنیم که نمونه استوانه‌ای در واقع شامل تعدادی نوار با ارتفاعهای متغیر است که عمود بر خط رأس ترک و موازی با محور اصلی تیر، قرار گرفته‌اند. حال برای هر یک از این نوارها، فاکتورهای شدت تنش مشخص است. با توجه به اینکه دانسیته انرژی کرنشی، یک اسکالر است، انتگرال گیری در امتداد این نوارها مجاز است. بنابراین می‌توان فاکتورهای شدت تنش مورد نیاز را بدین ترتیب محاسبه کرد. این عملیات در مرجع [۵] انجام شده است.

با توجه به آنچه که گفته شد برای هر المان مستطیلی انتخاب شده بر روی یک تیر استوانه‌ای تحت خمش محض، داریم [۳]:

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} F_1(a/h) \quad , \quad \sigma_0 = (4M/\pi R^4)y \quad (۱۵)$$

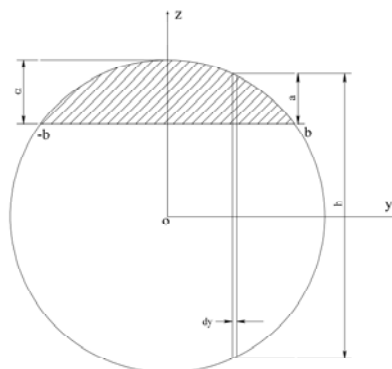
که در آن داریم:

$$F_1(a/h) = 1.12 - 1.4(a/h) + 7.33(a/h)^2 - 13.1(a/h)^3 + 14(a/h)^4 \quad (۱۶)$$

این رابطه برای  $a/h < 0.6$  دارای دقت  $\pm 0.2\%$  است که برای کاربردهای مهندسی دقت مناسبی است. در این رابطه داریم:

$$h = 2\sqrt{R^2 - y^2} \quad , \quad a = \alpha - R + \sqrt{R^2 - y^2} \quad (۱۷)$$

$h$  ارتفاع هر نوار به عرض  $dy$  در موقعیت  $y$  و  $a$  نیز عمق ترک در این نوار و  $\alpha$  عمق ماکزیمم ترک است. این مسأله در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل (۳) سطح مقطع ترک و پارامترهای بکار رفته در آن

بنابراین دانسته انرژی کرنشی بصورت زیر خواهد بود:

$$J_s = \frac{K_I^2}{E'} = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{16M^2 y^2 a}{\pi R^8} F_1^2(a/h) \quad (18)$$

بنابراین با جایگذاری در رابطه (۱۳) و انتگرال گیری و استفاده از رابطه (۱۱)، میزان چرخش اضافی  $\theta^*$ ، بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\theta^* = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{32M}{\pi R^8} \Phi_I(\alpha/R) \quad (19)$$

که در آن داریم:

$$\Phi_I(\alpha/R) = \int_{-b}^b \int_0^\alpha \alpha y^2 F_1^2(a/h) d\alpha dy \quad (20)$$

برای یک تیر بدون ترک با مشخصات ذکر شده، جابجایی محوری و جانبی نقطه انتهای تیر از رابطه زیر بدست می آید [۲]:

$$w_0 = M/2EI [L_0^2 + \nu R^2] \quad , \quad u_0 = -RML_0/EI \quad (21)$$

همچنین چرخش نقطه انتهای تیر از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\theta_0 = ML_0/EI \quad (22)$$

حال اگر  $u_0$  و  $u^*$  به ترتیب حرکت طولی سطح پایین تیر بدون حضور ترک و ناشی از ترک باشند، رابطه هندسی زیر برقرار است [۲]:

$$\frac{\theta^*}{\theta_0} = \frac{u^* L_0}{u_0 (x - L)} \quad (23)$$

با جایگذاری روابط (۲۱) و (۲۲)، در رابطه (۲۳) خواهیم داشت:

$$\theta^* = \frac{u^* L_0}{(x - L)R} \quad (24)$$

از طرفی، از رابطه (۶) داریم  $u^* = -zf'w_0$  و بنابراین تابع اغتشاش ترک از رابطه زیر تبعیت می کند:

$$f' = -\frac{16(1-\nu^2)\Phi_I}{L_0[L_0^2 + \nu R^2]R^3} \frac{x-L}{z} \quad (25)$$

که با انتگرال گیری در امتداد  $x$  خواهیم داشت:

$$f = -\frac{8(1-\nu^2)\Phi_I}{L_0[L_0^2 + \nu R^2]R^3} \frac{(x-L)^2}{z} \quad (26)$$

حال با مشخص بودن تابع اغتشاش ترک می توان به محاسبه فرکانس طبیعی پرداخت.

### فرکانسهای طبیعی برای یک تیر ترکدار

فرض می کنیم که تیر نشان داده شده در شکل (۱)، تحت اثر یک جفت ممان خمشی  $M$  که در دو انتهای تیر در لحظه صفر و بصورت ناگهانی وارد می شوند، شروع به ارتعاش کند. شرایط مرزی در این حالت عبارتند از:

$$w|_{x=0} = 0, \quad \partial^2 w / \partial x^2|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=L_0} = 0, \quad \partial^2 w / \partial x^2|_{x=L_0} = 0 \quad (27)$$

با بکار بردن روش جداسازی متغیرها، در مورد معادله (۷) می توان گفت:

$$w = W(x)T(t) \quad (28)$$

با جایگذاری در معادله (۷) داریم:

$$c_0^2 \left\{ \partial^4 \left[ \frac{I_7(x)W(x)}{\partial x^4} \right] \right\} T(t) = [I_7(x)W(x)] \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0 \quad (29)$$

که در آن داریم:

$$c_0^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad (30)$$

معادله دیفرانسیل پاره‌ای (۲۹)، قابل تقسیم به دو معادله عادی زیر است:

$$[I_7(x)W(x)]^{iv} + (\omega_n^*/c_0)^2 [I_7(x)W(x)] = 0, \quad \ddot{T} + \omega_n^{*2} T = 0 \quad (31)$$

که  $\omega_n^*$  ها فرکانسهای طبیعی تیر ترکدار هستند. بخش اول معادله (۳۱) معادله مودهای طبیعی ارتعاش تیر است. حل این معادله بصورت زیر در مرجع [۲] پیشنهاد شده است:

$$W(x) = \phi(x) [A_n \sin(\beta_n^* x) + D_n \sinh(\beta_n^* x)] \quad (32)$$

که  $\omega_n^* = c_0 \beta_n^{*2}$ ، فرکانسهای طبیعی تیر ترکدار و  $\phi(x) = 1/I_7(x)$  تابع اغتشاشات شکل مود است که با تابع  $f(x, z)$  ارتباط دارد. شرایط مرزی در این تیر با تکیه گاههای ساده، منجر به معادله مشخصه زیر می شود:

$$I_7(L_0)/I_7(L_0) [\cos(\beta_n^* L_0) - \sin(\beta_n^* L_0) \coth(\beta_n^* L_0)] + \beta_n^* \sin(\beta_n^* L_0) = 0 \quad (33)$$

با حل عددی این معادله، فرکانسهای طبیعی قابل حصول است.

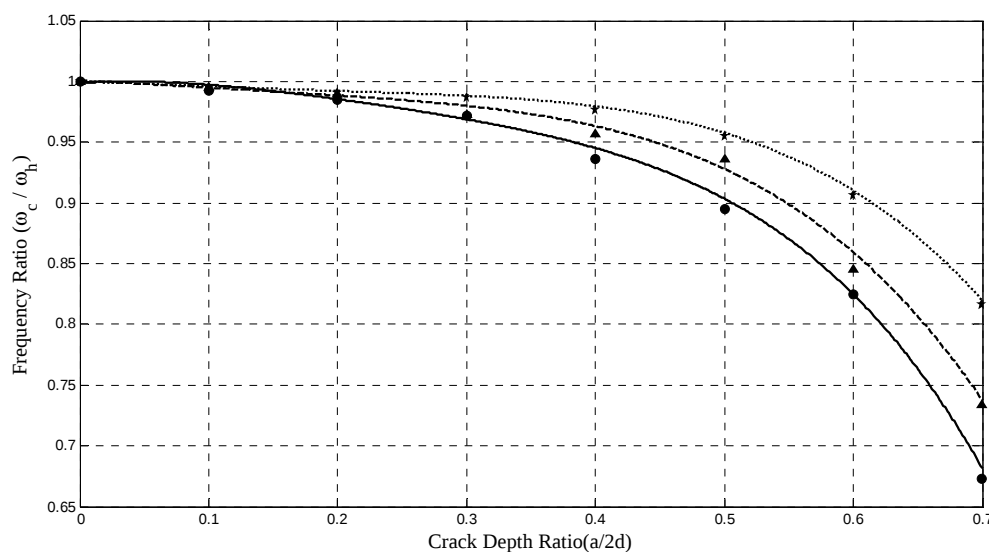
## نتایج و بحث

با بدست آمدن معادلات فرکانسی برای یک تیر با ترک باز، طی معادله (۳۳)، حال می توان با حل عددی این معادلات برای یک نمونه خاص فرکانس طبیعی اول را بدست آورد. بدین منظور یک نمونه آلومینیومی به طول ۲۳۵ میلیمتر و قطر ۱۵ میلیمتر که دارای یک ترک به عمق متغیر از ۰ تا ۰/۶ قطر نمونه است، در نظر می گیریم. برای چنین نمونه ای مدول الاستیسیته برابر

$$E = 7.2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \text{ و چگالی آن } \rho = 2800 \text{ Kg/m}^3 \text{ و نسبت پواسون برای آن } \nu = 0.35 \text{ است.}$$

شکل (۴) فرکانسهای طبیعی این تیر را برای یک ترک کاملاً باز نشان می دهد. روشن است که با افزایش عمق ترک، نرمی سیستم افزایش یافته و فرکانس طبیعی آن نسبت به حالت بدون ترک کاهش می یابد.

مقایسه این نتایج با نتایج بدست آمده در مرجع [۱] که برای یک تیر با مقطع مستطیل صورت پذیرفته است، نشان می دهد که در یک تیر استوانه‌ای افزایش عمق ترک، خصوصاً در بخش ابتدایی منحنی با شیب کمتری فرکانس را کاهش می دهد. در واقع به دلیل عدم توزیع یکنواخت جرم و تمرکز بیشتر آن در ناحیه میانی ترکهای با عمق کم، تأثیر کمتری بر نرمی سیستم دارند و لذا فرکانس طبیعی را کمتر می کاهند.



شکل (۴) منحنی نسبت فرکانسی تیر استوانه‌ای ترک‌دار با ترک کاملاً باز به تیر بدون ترک بر حسب نسبت عمق ترک به قطر

تیر

مراجع

- 1- A. D. Dimarogonas, Vibration of cracked structures-A state of the art review, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 5, 1996, pp. 831-857.
- 2- Jorg Wauer, On the dynamics of cracked rotors: A literature survey, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 43,1, 1990, pp. 13-17.
- 3- R. Gasch, A survey of the dynamic behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack, *Journal of sound and vibration*, Vol. 160(2), 1993, pp 313-332.
- 4- A. D. Dimarogonas, S. A. Paipetis, *Analytical methods in rotor dynamics*, London, Applied science publisher, 1983.
- 5- C. A. Papadopoulos, A. D. Dimarogonas, Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 117(1) 1987, pp. 81-93.
- 6- D. Y. Zheng, S. C. Fan, Vibration and stability of cracked hollow-sectional beams, *Journal of sound and vibration*, Vol. 267, 2003, pp. 933-954.
- 7- S. Christides, A. D. S. Barr, One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams, *Journal of mechanical science*, Vol. 26(11/12), 1984, pp. 639-648.
- 8- H. H. Shen, C. Pierre, Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks, *Journal of*

- sound and vibration, Vol. 138(1), 1990, pp. 115-134.
- 9- M. H. H. Shen, C. Pierre, Free vibrations of beams with a single-edge crack, *Journal of sound and vibration*, Vol. 170(2), 1994, pp. 237-259
- 10- S. H. S. Carneiro, D. J. Inman, Comments on the free vibration of beams with a single-edge crack, *Journal of sound and vibration*, Vol. 244(4), 2001, pp. 729-737.
- 11- T. G. Chondros, A. D. Dimarogonas and J. Yao, A continuous cracked beam vibration theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215(1), 1998, pp. 17-34.
- 12- T. G. Chondros, A. D. Dimarogonas and J. Yao, Vibration of a beam with breathing crack, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 239(1), 2001, pp. 57-67.
- 13- X. F. Yang, A. S. J. Swamidass and R. Seshadri, Crack identification in vibrating beams using the energy method, *Journal of sound and vibration*, Vol. 244(2), 2001, pp. 339-357
- 14- D. Y. Zheng, S. C. Fan, Vibration and stability of cracked hollow-sectional beams, *Journal of sound and vibration*, Vol. 267, 2003, pp. 933-954
- 15- Hai-Ping Lin, Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply supported beams with a crack, *Engineering structures*, Vol. 26(4), 2004, pp. 427-436.
- 16- Y. Zheng and N. J. Kessissoglou, Free vibration analysis of a cracked beam by finite element method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 273(3), 2004, pp. 457-475
- 17- H. Tada, P. C. Paris and G. R. Irvin, *the stress analysis of cracks handbook*. Hellertown, Pennsylvania: Del Research Corp., 1973.
- 18- P. C. Paris, G. C. Sin, Fracture toughness and its applications, *ASME STP-381*, 30. Stress Analysis of cracks, 1965.
- 19- K. Hellan, *Introduction to fracture mechanics*, McGraw-Hill, 1985.
- 20- ANSYS User's Manual for rev. 8, ANSYS Inc., 2004.