



کاربرد روش هموارسازی در حل مسائل انتقال هدایت حرارتی معکوس یک بعدی

سمیه داودآبادی فراهانی^۱، محمد رضا داودآبادی فراهانی^۲

چکیده

در این مقاله به بررسی روش هموارسازی و روش تفاضل محدود در حل مسائل انتقال هدایت حرارتی معکوس یک بعدی پرداخته شده است. با استفاده از این الگوریتم شار حرارتی بر روی یک صفحه تخت تخمین زده شده است و دقت و پایداری این الگوریتم با الگوریتم های استاندارد IHCP نظیر روش دنباله ای تخمین متوالی توابع مقایسه شده است که بیانگر افزایش دقت و پایداری این روش است.

مقدمه

روش های معکوس، کاربرد بسیار زیادی در صنایع و مهندسی دارند که درمیان آنها، روش های هدایت حرارتی معکوس، شاخه جداگانه به خود اختصاص داده است. مسئله هدایت حرارتی مستقیم به مسئله ای گفته می شود که با معلوم بودن شرایط مرزی، خواص ترموفیزیکی، هندسه جسم و منبع حرارتی درون جسم، معادله هدایت حرارتی درون جسم حل می شود و توزیع دمای درون جسم مشخص گردد. در مقابل مسئله هدایت حرارتی معکوس، مسئله ای است شرایط مرزی (مانند شار حرارتی یا دما، خواص ترموفیزیکی، بخشی از هندسه جسم و همچنین منبع حرارتی درون جسم، نامعلوم است و به جای آنها با استفاده از دمای اندازه گیری شده برخی از نقاط جسم مجهولات تخمین زده می شوند. از لحاظ ریاضی اثبات شده که مسئله هدایت حرارتی معکوس یک مسئله بدوضع است چرا که خطاهای کوچک در داده ها باعث ایجاد خطاهای بزرگ در تاریخچه شار حرارتی محاسبه شده می شود. بنابراین برای مهار کردن این خطاها از روش های مرتب سازی استفاده می شود [1]. روش های حل مسائل هدایت حرارتی معکوس، در حالت کلی به دو دسته تقسیم می شوند: روش های دنباله ای و روش های تمام دامنه. به صورت تاریخی روش های دنباله ای در ایالات متحده گسترش داده شده اند و در حالی که روش های تمام دامنه در روسیه گسترش داده شده اند. مهمترین مزیت روش های دنباله ای بر روش های تمام دامنه عبارتست از:

1. روش های دنباله ای می توانند به طور همزمان (real time) مورد استفاده قرار گیرند.
2. در مسائل غیرخطی به خاطر وابسته بودن خواص حرارتی به دما، روش دنباله ای امکان خطی سازی مسئله را فراهم می کند.

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه تهران; sdavoodabadifarahani@gmail.com

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه سمنان; davoodabadi333@yahoo.com



3. روش دنباله ای نیاز به حافظه و زمان محاسباتی کمتری دارد.

این در حالی است که دقت روش های تمام دامنه بیشتر از روش های دنباله ای است از جمله روش های تمام دامنه ای روش تنظیم تیخونو و روش گرادیان مزدوج است که روش گرادیان مزدوج همچنان به عنوان یک الگوریتم تمام دامنه با موفقیت تمام برای مسائلی که شرط مرزی قسمت اعظمی از مرز را پوشش می دهد، استفاده می شود [2]. در این مقاله با استفاده از روش هموارسازی¹ که مفهوم آن توسط مانسیل و میلر در سال 1980 ارائه شده است [3] و توسط موریو در مسائل هدایت حرارتی معکوس گسترش یافته است [4]. روش هموارسازی یک روش تنظیم است که در آن از خاصیت میانگین گیری کرنل گوسین برای یکنواخت کردن² داده های تجربی استفاده شده است. در این مقاله از روش ارائه داده شده توسط موریو که به صورت اتوماتیک و بدون نیاز به دانستن مقدار نویز در داده ها شعاع هموارسازی ($\delta - mollification$) براساس ملاک Generalized cross validation (GCV) انتخاب می شود، برای فیلترینگ داده های اندازه گیری شده استفاده شده است. در این مقاله با استفاده از روش هموارسازی داده های تجربی مسئله معکوس به یک مسئله نسبتاً خوش وضع تبدیل می گردد و می توان با استفاده از الگوریتم های کاملاً ساده نظیر تفاضل محدود مسئله معکوس را حل نموده و شار حرارتی را در یک صفحه تخت یک بعدی که از یک سمت عایق بوده و از سمت دیگر در معرض شار حرارتی پله ای قرار دارد، با دقت خوبی شار حرارتی را تخمین می زند و دقت و پایداری این روش با دیگر روش های استاندارد در حل مسائل انتقال هدایت حرارتی معکوس مقایسه شده است.

روش هموارسازی

روش هموارسازی یک روش تنظیم است که در آن از خاصیت میانگین گیری کرنل گوسین برای یکنواخت کردن³ داده های تجربی استفاده شده است. در این مقاله از روش ارائه داده شده توسط موریو [2] که به صورت اتوماتیک و بدون نیاز به دانستن مقدار نویز در داده ها شعاع هموارسازی ($\delta - mollification$) براساس ملاک GCV انتخاب می شود، برای فیلترینگ داده های اندازه گیری شده استفاده شده است.

$$J_{\delta} f(t) = \int_0^1 \rho_{\delta}(t-s) f(s) ds$$

$$\rho_{\delta, \rho}(t) = \begin{cases} A_{\rho} \delta^{-1} \exp(-t^2 / \delta^2) & |t| < \rho \delta \\ 0 & |t| > \rho \delta \end{cases} \quad A_{\rho} = \left(\int_{-\rho}^{\rho} \exp(-s^2) ds \right)^{-1}$$

¹ Mollification

² Smoothing

³ Smoothing



تعریف مسئله

در این قسمت یک الگوریتم براساس استفاده از روش هموارسازی با کرنل گوسین ارائه شده است که در آن ابتدا داده‌های تجربی با استفاده از روش هموارسازی فیلتر شده و سپس با استفاده از روش تفاضل محدود به صورت کاملاً صریح با پیشروی در مکان، یک مسئله انتقال هدایت حرارتی معکوس تقریباً خوش وضع حل خواهد شد. با در نظر گرفتن یک مسئله انتقال هدایت حرارتی معکوس یک بعدی صفحه تخت متقارن در جایی که دما و شار حرارتی $f(t)$ و $q(t)$ در $x=1$ مجهول هستند و تاریخچه دما و شار حرارتی $F(t)$ و $Q(t)$ در $x=0$ قابل اندازه گیری هستند و با فرض یک مسئله انتقال هدایت حرارتی خطی با ضرایب ثابت و بدون این که از کلیت موضوع کاسته شود دمای اولیه صفر فرض می شود. در ادامه مسئله به صورت زیر بیان می شود.

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = F(t) \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0 \quad 0 < x < 1$$

$$u(1,t) = f(t) \quad t \geq 0$$

$$-u_x(0,t) = Q(t) \quad t \geq 0$$

$$-u_x(1,t) = q(t) \quad t \geq 0$$

(1)

با فرض $v = J_\delta u$ و $w = -\frac{\partial v}{\partial x}$ می توان معادله (1) را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$v(0,t) = J_\delta F_m, \quad w(0,t) = J_\delta Q_m, \quad t \geq 0$$

$$v(x,0) = 0 \quad 0 < x < 1$$

$$v(1,t) = J_\delta f_m, \quad w(1,t) = J_\delta q_m, \quad t \geq 0$$

(2)



هدف از این الگوریتم بازسازی دمای هموارشده مجهول در فاصله $I=[0,1]$ با در نظر گرفتن یک شبکه بندی یکنواخت در (x,t) :

$$\{x_s = sh, t_j = jk, s = 0,1,\dots,N, Nh = 1, j = 0,1,\dots,M, Mk = l\}$$

که L وابسته به k و h است ($L > 1$) توابع مجزاشده دما و شارحرارتی هموارشده به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$v_s^j = v(x_s, t_j), w_s^j = w(x_s, t_j) \quad 0 \leq s \leq N, 0 \leq j \leq M$$

توجه کنید که

$$v_0^j = J_\delta F_m(t_j), w_0^j = J_\delta Q_m(t_j), 0 \leq j \leq M$$

$$v_s^0 = 0 \quad 0 \leq s \leq N$$

در ادامه معادله دیفرانسیل جزئی در رابطه (20-3) با حالت سازگار تفاضل محدود به صورت زیر تقریب زده می شود.

$$\begin{aligned} \frac{v_s^{j+1} - v_s^j}{2k} &= -\frac{w_{s+1}^j - w_s^j}{h} \\ w_{s+1}^j &= -\frac{v_{s+1}^j - v_s^j}{h} \quad 1 \leq s \leq N, 1 \leq j \leq M-1 \end{aligned} \quad (3)$$

فرم گسسته شده معادلات به صورت زیر است:



$$w_{s+1}^j = w_s^j - \frac{h}{2k} [v_s^{j+1} - v_s^j] \quad (4)$$

$$v_{s+1}^j = v_s^j - h w_{s+1}^j \quad s = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-s-1$$

$$v_0^j = J_\delta F_m(jk) \quad j = 1, \dots, M-1$$

$$w_0^j = J_\delta Q_m(jk) \quad j = 1, \dots, M-1$$

$$v_s^0 = 0, \quad s = 1, \dots, N-1, N$$

توجه کنید با پیشروی در مکان و در هر گام با استفاده از دماهای زمان قبل، دما در زمان جدید محاسبه می شود.

الگوریتم حل عددی به صورت زیر بیان می شود:

با این فرض که داده های قابل اندازه گیری دما و شار حرارتی در بازه زمانی $D=[0, l]$ که $k=\Delta t$ ، $h=\Delta x$ ، $L=1-k+h$ و $Nh=1$ به صورت مجزا شده وجود دارند و $M+1$ نمونه در بازه D به صورت زیر تعریف می شود:

$$t_j = jk \quad j = 0, 1, 2, \dots, M$$

باید تابع داده های F_m و Q_m را به گونه ای توسعه داده شود که در بازه $D_a - D$ به صورت یکنواخت میرا شده و به سمت صفر بروند.

$$D_a = [-a, l+a] \quad k < a = 3\delta_{\max} \leq \frac{1}{2}$$

برای نمونه می توان F_m را به صورت زیر تعریف نمود:

$$F_m(t) = F_m(0) \exp(t^2 / (a^2 - t^2)) \quad -a \leq t \leq 0 \quad (5)$$

$$F_m(t) = F_m(l) \exp((t-l)^2 / ((t-l)^2 - a^2)) \quad a \leq t \leq l+a$$

به طور مشابه می توان Q_m را توسعه داد. روش انتخاب پارامتر شعاع هموارسازی بر اساس روش اول بیان شده در

قسمت قبل است. با استفاده از روش ذکر شده مقدار شعاع هموارسازی δ_F و δ_Q برای F_m و Q_m انتخاب می شود.



$$J_{\delta_F} F_m(t_j) = v_N^j$$

$$J_{\delta_Q} Q_m(t_j) = w_N^j \quad j = 0, 1, \dots, M$$

با به کار بردن الگوریتم زیر شار حرارتی و دمای هموار شده در $x=1$ تخمین زده شود.

$$1. \quad w_{s+1}^j = w_s^j - \frac{h}{2k} [v_s^{j+1} - v_s^{j-1}] \quad s = 0, 1, \dots, N-1 \quad j = 1, \dots, M-s-1$$

$$2. \quad v_{s+1}^j = v_s^j - h w_{s+1}^j \quad s = 0, 1, \dots, N-1 \quad j = 1, \dots, M-s-1$$

$$3. \quad v_s^0 = 0 \quad s = 1, 2, \dots, N \quad j = 0, 1, \dots, M-N$$

با در نظر گرفتن v_N^j و w_N^j این مقادیر تقریبیاتی پذیرفتنی برای دما و شار حرارتی می باشند.

حال با استفاده از الگوریتم بیان شده شار حرارتی $q(t)$ در $x=1$ در یک صفحه تخت که در معرض شار حرارتی پله‌ای در بازه زمانی $t=[0.2, 0.6]$ قرار دارد، تخمین زده می شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله به صورت زیر است:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (3-24)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad 0 < x < 1$$

$$u(1, t) = f(t), \quad -u_x(0, t) = 0, \quad -u_x(1, t) = -1 \quad t \geq 0$$

که دماهای دقیق از رابطه (3-25) به دست می آید:

$$u(x, t) = \begin{cases} t + \frac{1}{6}(3x^2 - 1) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\pi x}{n^2 \pi^2} \exp(-(n\pi)^2 t) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$



بنابراین تابع دما برای مسئله IHCP به صورت زیر است:

$$Q(t) = -u_x(0, t) = 0 \quad (7)$$

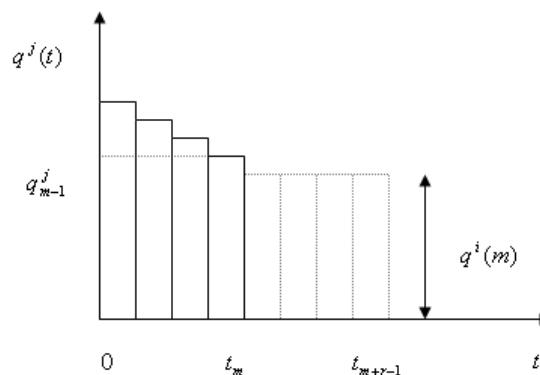
$$F(t) = -u(0, t - 0.2) + u(0, t - 0.6) \quad (8)$$

روش دنباله ای تخمین متوالی توابع

شار حرارتی گسسته شده بر زمان است که در هر مرحله فرض می شود تا جزء $M-1$ ام تخمین زده شده است و توزیع دما در داخل جسم را در زمان t_{m-1} مشخص است. در روش SFS به طور موقت فرض می شود (شکل (1)) که $q_M = q_{M+i-1} = cte \quad i=1,2,\dots,r$ توجه کنید که در مسائل هدایت حرارتی معکوس دقت و پایداری دو موضوع کاملاً متضاد هستند. در مقادیر بالای r ، تخمین پایدار اما خطای بایاس آن زیاد است. تابع مجموع مربعات خطا به صورت زیر تعریف می شود باید مینیمم گردد.

$$f = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^J (Y_{m+i-1,j} - T_{m+i-1,j})^2 \quad (9)$$

در حالی که J تعداد سنسورها، Y دماهای اندازه گیری شده با J ام سنسور در زمان $M+i-1$ ام است و T دمای محاسبه



شکل (1) ثابت فرض کردن شار حرارتی برای r زمان بعد برای یک مؤلفه شار حرارتی

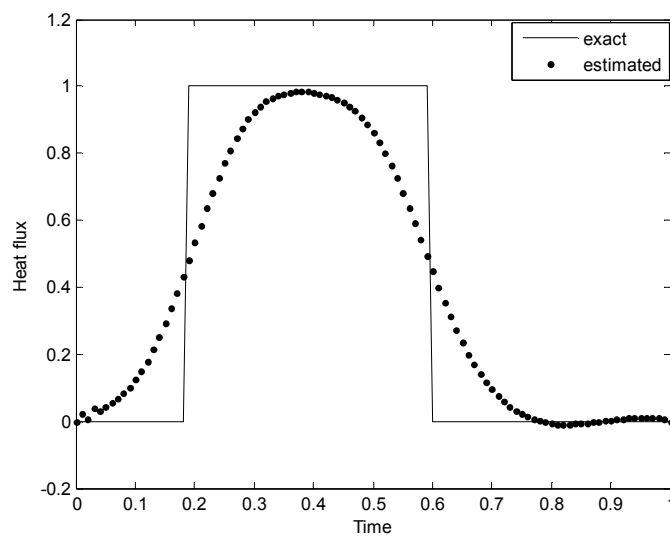
مقادیر مجهول از رابطه زیر به دست می آیند:

$$[q] = [q^*] + (p') \times [X]_{1 \times r} (([Y^m] - [T^*])_{r \times 1}) \quad (11)$$

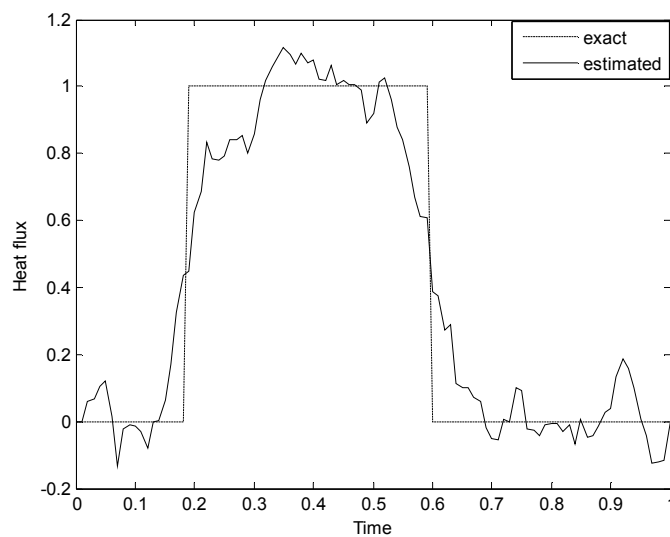
$$[P'] = [X]_{1 \times r}^{-1} [X]_{r \times 1}$$

که داده های تجربی با اضافه کردن خطا با توزیع نرمال (گوسی) $\sigma = 0.01$ تولید می شود و گام زمانی و گام مکانی برابر با 0.01 است. شکل (2) و (3) دما و شار حرارتی تخمین زده شده را در $x=1$ نشان می دهند و جدول (1) مجذور خطای مربع اختلاف کمیت تخمین زده شده را با کمیت واقعی را نشان می دهد و از رابطه زیر محاسبه می شود و بیانگر دقت روش است

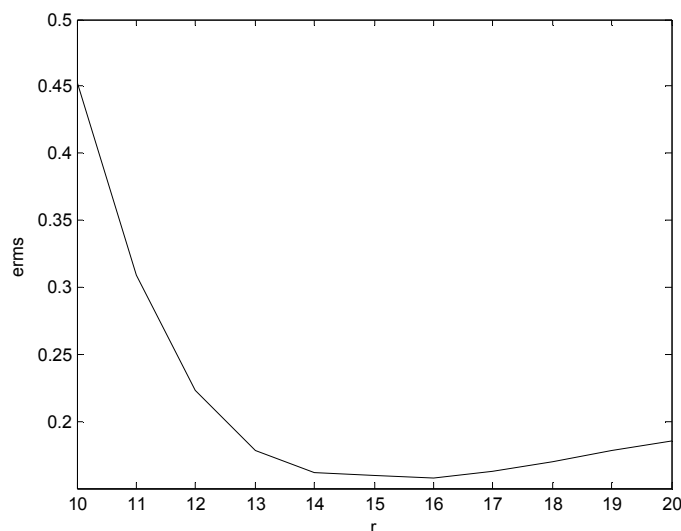
$$erms = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{q}_i - q_{exact_i})^2}{n}} \quad (11)$$



شکل (2) تخمین شار حرارتی با استفاده از الگوریتم تفاضل محدود و روش هموارسازی



شکل (3) تخمین شار حرارتی با استفاده از روش SFM



شکل (4) تغییرات Erms بر حسب r زمان ثابت

جدول (1) آنالیز خطا

	SFSM	Finite Difference-Mollification method
Erms	0.18745	0.19672

نتیجه گیری

روش هموارسازی باعث شده مسئله بدوضع به یک مسئله نسبتاً خوش وضع تبدیل شود و بتوان از الگوریتم های ساده نظیر تفاضل محدود برای حل مسائل IHCP استفاده نمود و دقت آن تقریباً برابر با الگوریتم های متداول معکوس در حل مسائل IHCP است.

مراجع:

[1] Beck, J. V., Blackwell, B., Clair, S.R., Inverse heat conduction: Ill-Posed Problems, Wiley, New York, 1988.

[2] C.-H. Huang, C.-W. Chen, A boundary-based inverse problem in estimating transient boundary conditions with conjugate gradient method, International Journal of Numerical Methods in Engineering 42(1998),pp.943-965.



کنفرانس دانشجویی مهندسی مکانیک
آبان ماه 1388 - مشهد - دانشگاه آزاد اسلامی مشهد



[3] Manselli, P. and K.C. Miller, Calculations of the surface temperature and heat flux on one side of a wall from measurements on the opposite side, Ann. Mat.Pura Appl., 123, 161-183, 1980.

[4] Murio, D. A., Automatic Numerical Differentiation by Discrete Mollification, Computers and Mathematics. Applic., 13(4), 381-386, 1987.