

«به نام خدا»



گروه دینامیک سیالات محاسباتی دانشگاه صنعتی اصفهان

جریان‌های متلاطم با سطح مشترک

محمود چرمیان

کلیه حقوق این کتاب الکترونیک متعلق به گروه دینامیک سیالات محاسباتی دانشگاه صنعتی اصفهان می‌باشد
هر گونه چاپ، تکثیر و استفاده از آن با ذکر منبع بلا مانع است.

<http://CFD.iut.ac.ir>



فصل اول

مقدمه

۱-۱ جریان های با سطح مشترک

بسیاری از جریان ها در طبیعت و در صنعت با سطوح آزاد و یا سطوح مادی درگیر هستند. محدوده کاربرد آنها از علوم محیطی، ژئوفیزیک، و فیزیک پایه تا مسائل مهندسی مختلف است. جریان های سیال با سطح مشترک^۱ به آن دسته از جریان ها گفته می شود که دو سیال غیر حلال با خواص متفاوت در کنار یکدیگر حضور یابند و سطح مشترک نیز همان فصل جدائی دو سیال است که خواص در عبور از آن تغییر می کنند. به عبارت دیگر سطح مشترک مرز بین دو سیال است که بصورت ناپیوستگی چگالی، فشار و سایر خواص فیزیکی ظاهر می شود. در چنین جریان هایی، دو سیال در یکدیگر حل نمی شوند و عمل انتقال جرم در سطح مشترک صورت نمی گیرد. جریان با سطح آزاد حالت حدی سطح مشترک است که در آن تنش برشی در سطح آزاد ناچیز است و فشار در یک طرف از سیال تابعی از مکان نمی باشد. این دسته جریان ها بخش وسیعی از جریان های موجود در طبیعت می باشند. در صنعت کاربردهای زیادی برای این جریان ها می توان برشمرد. یکی از کاربردهای عمده جریان های با مرز مشترک، فرایند تولید قطره، اسپری و اتمیزه کردن مایعات است. اسپری کاربردهای متعددی مانند احتراق سوخت مایع در موتور احتراق داخلی، توربین های گازی، کوره ها، دیگ های بخار، رنگ آمیزی، نقاشی، پوشش سطوح فلزی جهت جلوگیری از خوردگی و یا تغییر خواص فیزیکی، دستگاه چاپ و چاپگر، خنک کردن لوله ها در سوپرهیترهای دیگ بخار، دستگاه های مرطوب کننده هوا، وسایل زیست محیطی و دارد. از کاربردهای عمده جریان با سطح آزاد که حالت خاص جریان با مرز مشترک می باشد، بررسی جریان در کانال ها را می توان نام برد. از کاربردهای دیگر جریان سیالات با مرز مشترک می توان به ریخته گری فلزات اشاره نمود. اینگونه جریان ها، محدوده وسیعی از کاربردهای در زمینه علوم زیست محیطی، ژئوفیزیک، فیزیک و مهندسی را می پوشاند. بطور کلی مشخصه های سطح مشترک بصورت زیر می باشد:

¹ interface flow



۱- پخش در توزیع فشار در اثر نیروی کشش سطحی (در سطح مشترک دو سیال که لایه‌ای از آنها مایع

باشد).

۲- ناپایداری جریان در اثر پدیده‌هایی مانند ناپایداری‌های کلین-هلم هولتز و ریلی تیلور

۳- ایجاد موج و شکسته شدن آن

۴- شکسته شدن جت سیال^۱، تولید قطره، اتصالات قطرات بهم^۲

به همین علت، شکل مرز مشترک نقش اساسی در دینامیک مسئله پیدا می‌کند و تعیین محل دقیق، انحنا و توپولوژی سطح مشترک در شبیه‌سازی مسئله مهم می‌باشد.

بسیاری از جریان‌های سیال در طبیعت و صنعت متلاطم هستند که جریان‌های سیال با سطح مشترک نیز از این قاعده مستثنی نمی‌باشند. جریان در رودخانه‌ها و یا دریاها ممکن است به دلیل برش در کف بستر آن‌ها، وزش باد و یا امواج سطحی متلاطم شوند. در صنعت نیز جریان‌هایی نظیر جریان کانال باز، اتمیزه شدن جت و یا جریان اطراف کشتی‌ها مثال‌های جریان متلاطم با سطح مشترک می‌باشد. برای پیش‌بینی توپوگرافی سطح مشترک، نحوه اتمیزه شدن جت و یا شکستن ساختارها در سطح مشترک نیاز به شناخت ساختار متلاطم در نزدیک سطح مشترک و مدل‌سازی این ساختارها در شبیه‌سازی عددی می‌باشند. اهمیت این جریان سبب شده است که در دو دهه‌ی اخیر بخش عمده‌ای از تحقیقات و پژوهش‌های علم مکانیک سیالات متوجه این دسته جریان‌ها شود. از طرفی با تکامل روش‌های عددی و استفاده از آن‌ها به عنوان ابزاری برای طراحی، بخشی از این تحقیقات در راستای توانمند کردن روش‌های عددی و به دنبال آن شبیه‌سازی عددی این نوع جریان‌ها می‌باشد. بر همین اساس روش‌های عددی مختلفی برای شبیه‌سازی این جریان‌ها ارائه شده است.

¹ Jet break up

² Coalescence



فصل دوم

معادلات حاکم بر جریان های با سطح مشترک و شبیه سازی عددی آنها

۱-۲ مقدمه

از آنجا که در این تحقیق جریان متلاطم روی سطح مشترک بررسی می شود، در این فصل ابتدا معادلات حاکم بر جریان های با سطح مشترک را بیان نموده ، سپس به توضیح روش های مختلف شبیه سازی عددی این گونه جریان ها می پردازیم.

۲-۲ معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان های با سطح مشترک به شکل زیر می باشند:
معادله پیوستگی:

که با فرض تراکم پذیری و عدم تغییر فاز که در تحقیق حاضر مورد نظر است به صورت زیر در می آید.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1-2)$$

معادلات ممنتوم:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + \rho g_i + F_{st,i} \quad (2-2)$$

که در این معادلات بسته به اینکه در کدام سیال هستیم، خواص همان سیال مورد استفاده قرار می گیرد. در ادامه به روش های به دست آوردن اطلاعات بر روی مرز مشترک دو سیال (خواص فیزیکی، شکل سطح، ...) می پردازیم.



۲-۳ روش‌های شبیه سازی عددی جریان‌های با سطح مشترک

با توجه به وجود ناپیوستگی در خواص سیالات در میدان حل در محلی که سطح مشترک وجود دارد، همچنین متحرک بودن این سطح، وجود تغییر فاز در لایه های مجاور سطح، کشش سطحی، بدون ضخامت بودن سطح و ... شبیه سازی عددی این گونه جریان ها از یک طرف بسیار جالب و از طرف دیگر چالش برانگیز است. زیرا روش عددی که در این گونه جریان ها به کار گرفته می شود باید علاوه بر ارضاء کردن معادله بقای جرم و مقرون به صرفه بودن از لحاظ محاسباتی، قادر به معرفی شکل و انحنای سطح باشد. همچنین باید ضخامت سطح را تا حد امکان کوچک کند و قابلیت تعمیم به شبکه های سه بعدی را نیز داشته باشد. با توجه با این مطالب الگوریتم هایی که معمولاً برای ردیابی سطح به کار می روند به دو دسته تقسیم می شوند:

۱. روش های دنبال کننده سطح^۱
۲. روش های تسخیر کننده سطح^۲

۲-۳-۱ روش‌های دنبال کننده سطح

در این گونه روش‌ها با نگاه شبه لاگرانژی به سطح، سطح توسط نقاطی مشخص می شود که پیگیری این نقاط، ردیابی سطح را نتیجه می دهد. مکان این نقاط با انتگرال گیری از معادله زیر در هر لحظه مشخص می شود:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i \quad (2-3)$$

که در این معادله x_i مختصات مکانی نقاط مزبور و u_i سرعت مربوط به آنها می باشد. در روش های لاگرانژی مرز شبکه محاسباتی کاملاً بر سطح مشترک منطبق می باشد. در این صورت، نقاط شبکه به نقاط روی سطح متصل بوده و با آن جابجا می شوند. در شبکه های شبه لاگرانژی شبکه حل ثابت بوده و سطح داخل این شبکه ثابت حرکت می کند، اما ردیابی سطح با ردیابی نقاط روی آن صورت می گیرد. در صورتی که از این روش ها برای تعیین سطح مشترک استفاده شود، باید توجه داشت که به دلیل گردان‌های بزرگ سرعت در دامنه حل، شکل المانها پیچیده‌ی درهم ریخته می شود. این مسئله ممکن است منجر به تولید خطای از دست رفتن دقت در محاسبات، و یا عدم همگرایی حل شود. بنابر این باید در صورت نامناسب شدن شبکه محاسباتی، میدان حل مجدداً شبکه بندی شود که در این حالت نیز انتقال اطلاعات از شبکه قبلی به شبکه جدید ممکن است بسیار زمان بر و غیر دقیق باشد. لذا در

¹ Tracking methods
² Capturing methods

شرایطی که هندسه سطح پیچیده باشد و یا پدیده‌های شکست^۱ و یا به هم پیوستن^۲ رخ دهد، این روش با مشکلاتی مواجه است.

۲-۳-۲ روش‌های تسخیر کننده سطح

در این دسته از روش‌ها با دیدگاه اوپلری به میدان جریان مواجه هستیم، به این معنی که شبکه محاسباتی در تمام زمان حل ثابت و بدون تغییر باقی می‌ماند. در این روش‌ها سطح به صورت صریح ردیابی نمی‌شود بلکه با ردیابی خاصیت F که به هر کدام از سیالات نسبت داده می‌شود سطح نیز جابجا می‌شود. به خاصیت F تابع مشخص کننده فاز^۳ یا تابع رنگ^۴ گفته می‌شود.

اگر یکی از سیالات را با عدد ۱ و دیگری را با عدد ۲ مشخص کنیم، این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F = \begin{cases} fluid1 & F_1 \\ fluid2 & F_2 \\ at\ interface & F_1 < F < F_2 \end{cases} \quad (4-2)$$

به علت ضخامت صفر سطح مشترک در واقع در روی مرز مشترک یک ناپیوستگی در این خاصیت وجود دارد و عبارت سوم تنها در حل عددی معنی پیدا می‌کند. این خاصیت برای یک ذره از سیال همواره ثابت بوده و متاثر از رفتار جریان نمی‌باشد. بنابراین مشتق مادی آن صفر می‌باشد.

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (5-2)$$

در حقیقت در روش اوپلری موقعیت سطح محلی است که مقدار F بین F_1 و F_2 قرار بگیرد (که حالت سوم در معادله (۴-۲) می‌باشد).

در روش‌های اوپلری، بر خلاف روش‌های لاگرانژی، سطح بیان هندسی مشخصی ندارد و هر چقدر ضخامت ناحیه سطحی کمتر باشد، پاسخ‌های دقیق‌تری حاصل می‌شود.

با توجه به تعریف تابع F این امکان وجود دارد که تنها یک دسته معادله برای کل میدان حل تعریف کنیم، در حالیکه در روش لاگرانژی معادلات برای هر سیال به صورت جداگانه اعمال می‌شود. در روش‌های اوپلری معادلات به گونه‌ای هوشمند در هر سیال به معادلات حاکم بر آن محیط تبدیل می‌شوند.

¹ Break up

² Coalescence

³ Indicator Phase Function

⁴ Color Function



به کمک این معادلات می‌توان پدیده‌های جدا شدن سطح و به هم پیوستن آن را بدون نیاز به ترفند خاصی شبیه‌سازی کرد. در بین روش‌هایی که اساس آن‌ها سخیر سطح می‌باشد می‌توان به روش‌های جابجایی پیوسته^۱، لولست^۲ و ردیابی حجم^۳ اشاره کرد. در این تحقیق روش ردیابی حجم مورد بررسی قرار می‌گیرد و از پرداختن به سایر روش‌ها خودداری می‌شود.

● **روش ردیابی حجم:** این روش به روش نسبت حجمی سیال و یا (VOF) نیز معروف است و نسبت به روش‌های دیگر عمومیت بیشتری یافته است. در این روش بقای جرم، مستقیماً برای هر سیال اعمال می‌گردد. همچنین تغییرات توپولوژی سطح مشترک مستقیماً حساب شده و هیچ گونه تمهید خاصی برای شبیه‌سازی جدا شدن سطح و به هم پیوستن آن لازم نیست. این روش به راحتی قابل تعمیم به حالت سه بعدی می‌باشد و برای الگوریتم‌های موازی نیز کاربرد دارد.

در این روش تابع رنگ (F)، برای یکی سیال‌ها مقدار ۱ و برای سیال دیگر مقدار ۰ را می‌پذیرد. با کمک این تابع می‌توان خواص فیزیکی سیال را در هر نقطه از دامنه حل تعریف نمود. اگر ϕ را به عنوان یک خاصیت فیزیکی همانند چگالی، لزجت و ... در نظر بگیریم برای این خاصیت در کل میدان داریم:

$$\phi = \phi_2 + F(\phi_1 - \phi_2) \quad (6-2)$$

که اندیس ϕ نشانگر سیال مورد نظر می‌باشد. نمایش ریاضی تابع F به فرم زیر می‌باشد:

$$F = \begin{cases} fluid1 & 1 \\ fluid2 & 0 \\ at\ interface & 0_1 < F < 1 \end{cases} \quad (7-2)$$

به عبارت دیگر می‌توان گفت که F، نسبت حجم سیال ۱ به حجم کل سلول می‌باشد. بنابراین در سلول‌هایی که تنها سیال یک موجود می‌باشد مقدار این تابع برابر ۱، و در سلول‌هایی که تنها سیال ۲ حضور دارد مقدارش برابر ۰ می‌باشد. پر واضح است که مقدار F در سلولی که هر دو سیال موجود باشند (سطح مشترک) بین ۰ و ۱ خواهد بود. شکل زیر به واضح تر شدن مسئله کمک می‌کند.

¹ Continuum Advection

² Level set

³ Volume Tracking



(الف)

0	0	0
0	0.3	0.5
0.5	0.9	1

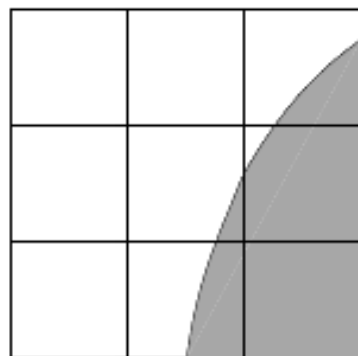
(ب)

شکل (۱-۲) الف- شکل دقیق سطح مشترک بین دو سیال،

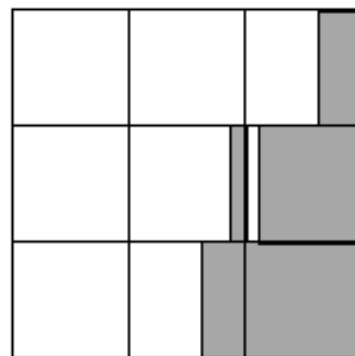
ب- توزیع تابع F حول سطح مشترک

در قسمت (الف) شکل (۱-۲) ناحیه تیره، سیال ۱ و ناحیه سفید سیال ۲ را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که برخی از سلول‌ها شامل هر دو ناحیه سفید و تیره می‌باشند که در حقیقت همان سطح مشترک می‌باشد. با مقایسه این شکل با (۱-۲) ب) مشاهده می‌شود که در سلول‌هایی که مرز سطح مشترک در آن‌ها واقع است، تابع F مقادیری بجز ۰ و ۱ می‌باشند. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد هر چه ضخامت این ناحیه کمتر باشد، پاسخ‌های دقیق‌تری خواهیم داشت. در روش واف، برای رسیدن به این دقت تکنیک‌هایی در نظر گرفته شده است. در این روش در سلول‌های ناحیه سطحی یک تقریب هندسی برای سطح در نظر گرفته می‌شود. این کار سبب می‌شود که در جابجایی F در میدان حل به کمک میدان سرعت، شار عبوری از سطوح سلول با دقت بیشتری محاسبه شده و دیفیوژن عددی آن کاهش یابد. بر همین اساس روش‌های مختلفی ابداع شده است که در اینجا به سیر تکاملی آن می‌پردازیم.

اولین روش، روش $SLIC$ می‌باشد که توسط نوح و دووارد ارائه شده است. در این روش سطح مشترک تنها به صورت سطوح افقی و یا عمودی می‌باشد که بسته به انتخاب کاربر سطوح می‌توانند تنها افقی و یا عمودی باشند. این روش در شکل (۲-۲) مشاهده می‌شود.



(الف)



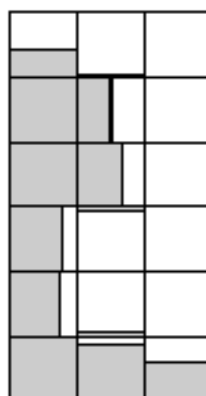
(ب)

شکل (۲-۲) الف- شکل دقیق، ب- استفاده از المان‌های قائم

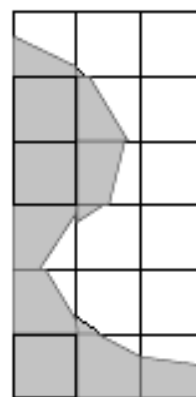
در روش SOLA که توسط هرتز و نیکولز ارائه شده است، سطح مشترک در هر سلول بسته به مقدار گرادیان F در آن سلول می‌تواند افقی یا عمودی باشد. (شکل ۲-۳ ب) روش دیگری که در این زمینه موجود است توسط یانگز معرفی شده است. در این روش سطح مشترک در هر سلول با استفاده از یک خط شیبدار تقریب زده می‌شود. همانطور که انتظار می‌رود دقت این روش از روش‌های قبلی بیشتر و سطح مشترک به سطح مشترک واقعی نزدیک‌تر است. شکل ۲-۳ این واقعیت را بخوبی نشان می‌دهد.

$F =$		
0.35	0.03	0
1	0.53	0
1	0.65	0
0.73	0.07	0
0.69	0.05	0
1	0.84	0.61

(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۲-۳) الف- شکل دقیق به همراه توزیع تابع F روی آن، ب- تولید سطح با روش SOLA، ج- تولید سطح به روش PLIC

دقت روش PLIC از مرتبه ۲ می‌باشد. از آنجا که در تحقیق حاضر بازسازی سطح توسط همین روش صورت می‌گیرد، در ادامه این روش توضیح داده خواهد شد.

۴-۲ بازسازی سطح به روش PLIC

معمولا الگوریتم واف در دو مرحله بر میدان حل اعمال می‌شود. در گام اول، با استفاده از مقدار نسبت حجمی در هر سلول و سلول‌های مجاور، سطح باز سازی شده و در گام دوم سطح بازسازی شده توسط میدان سرعت جابجا می‌گردد. توضیح این دو گام را در زیر مشاهده خواهید کرد.

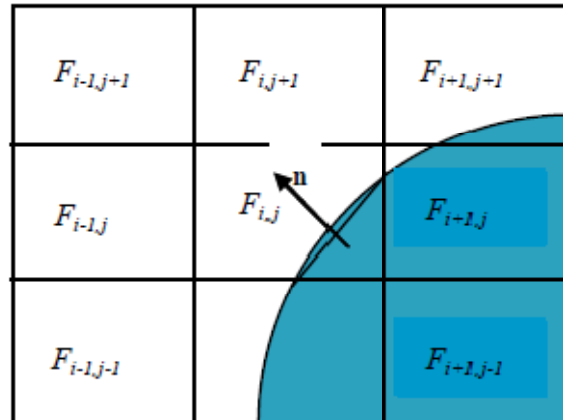
۴-۲-۱ مرحله بازسازی

در این جا با استفاده از محاسبه بردار عمود بر سطح در هر سلول از رابطه:

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (۸-۲)$$

معادله خطی که به عنوان تقریب شکل سطح در هر سلول در نظر گرفته می‌شود، در همان سلول در مختصات موضعی تعیین می‌گردد.

برای محاسبه گرادیان سطح در هر سلول از روابط (۹-۲) و (۱۰-۲) استفاده می‌شود. برای درک بهتر این روابط شکل (۴-۲) می‌تواند مفید باشد.



شکل (۴-۲) بازسازی سطح با استفاده از ۹ سلول

$$m_{x,i,j} = (F_{i-1,j+1} - F_{i+1,j+1} + 2(F_{i-1,j} - F_{i+1,j}) + F_{i-1,j-1} - F_{i+1,j-1}) / 8h \quad (۹-۲)$$

$$m_{y,i,j} = (F_{i+1,j-1} - F_{i+1,j+1} + 2(F_{i,j-1} - F_{i,j+1}) + F_{i-1,j-1} - F_{i-1,j+1}) / 8h \quad (۱۰-۲)$$

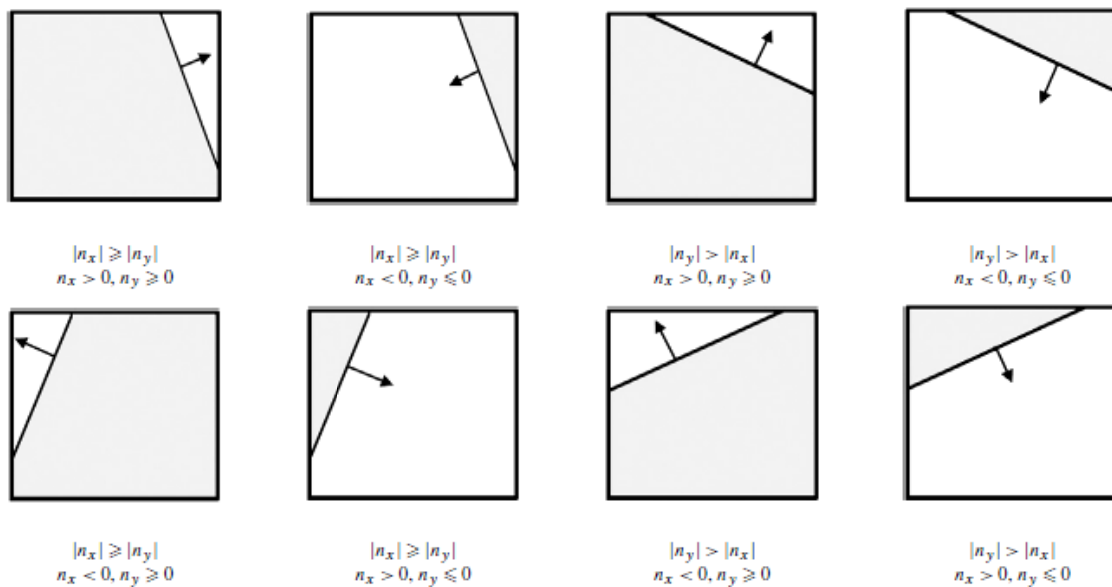


بنابراین با توجه به رابطه (۸-۲) مولفه های بردار n که برداری یکه است به شکل زیر درمی آید:

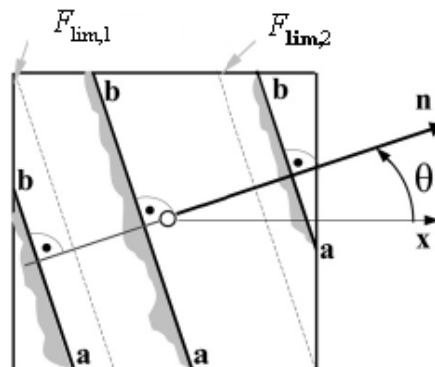
$$n_{x,i,j} = \frac{m_{x,i,j}}{\sqrt{m_{x,i,j}^2 + m_{y,i,j}^2}} \quad (۱۱-۲)$$

$$n_{y,i,j} = \frac{m_{y,i,j}}{\sqrt{m_{x,i,j}^2 + m_{y,i,j}^2}} \quad (۱۲-۲)$$

بنابر مقادیر n_x و n_y ، ۸ حالت مختلف ممکن است رخ دهد. شکل (۵-۲) این حالات را نشان می دهد.



شکل (۵-۲) حالات مختلف قرارگیری سطح در سلول های سطحی همانطور که در شکل (۶-۲) مشاهده می شود تمامی این ۸ حالت را می توان با اعمال ریاضی به ۳ حالت کلی تبدیل کرد. در این شکل θ زاویه بین بردار یکه و محور x می باشد. شکل حالتی که $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ می باشد، را نشان می دهد.



شکل (۲-۶) سه حالت ممکن برای قرارگیری سطح بسته به اینکه مقدار F چقدر باشد، سطح می تواند در سلول ۳ شکل مختلف بسازد. این ۳ شکل عبارتند از: سه ضلعی (مثلث)، چهار ضلعی (دوزنقه) و پنج ضلعی. دو مقدار حدی نیز می توان برای F روی سلول به صورت زیر در نظر گرفت:

$$F_{\lim,1} = \frac{n_y}{2n_x} \quad (۲-۱۳)$$

$$F_{\lim,2} = 1 - \frac{n_y}{2n_x} = 1 - F_{\lim,1} \quad (۲-۱۴)$$

اگر دو سر خطوط نشان دهنده ی سطح مشترک را با a و b نمایش دهیم، بسته به اینکه مقدار F در سلول نسبت به مقادیر حدی چگونه باشد سه حالت زیر حاصل می شود:

الف) اگر $F \leq F_{\lim,1}$ باشد (سه ضلعی):

$$a_x = \sqrt{2C\Delta x \Delta y \frac{n_y}{n_x}}, \quad a_y = 0; \quad (۲-۱۵)$$

$$b_x = 0, \quad b_y = \frac{2C\Delta x \Delta y}{a_x};$$

ب) اگر $F_{\lim,1} < F \leq F_{\lim,2}$ باشد (چهار ضلعی):

$$a_x = C\Delta x + \frac{n_y}{2n_x} \Delta y, \quad a_y = 0; \quad (۲-۱۶)$$

$$b_x = C\Delta x - \frac{n_y}{2n_x} \Delta y, \quad b_y = \Delta y;$$

ج) اگر $F > F_{lim,2}$ باشد (پنج ضلعی) :

$$\begin{aligned} a_x &= \Delta y, \quad a_y = \Delta y - \sqrt{2(\Delta x \Delta y - C)} \frac{n_x}{n_y}; \\ b_x &= \Delta x - \frac{2(\Delta x \Delta y - C)}{\Delta y - a_y}, \quad b_y = \Delta y; \end{aligned} \quad (17-2)$$

۲-۴-۲ مرحله انتقال

پس از مرحله بازسازی سطح، باید مرحله‌ی دیگری در نظر گرفته شود تا حرکت سطح نیز مدل شود. برای این منظور از یک الگوریتم که دارای مکانیزم اویلری می‌باشد، استفاده می‌کنیم. در این روش با استفاده از مقادیر سرعت روی وجوه سلول، یک میدان سرعت در داخل سلول تقریب زده می‌شود. با استفاده از این میدان سلول جابجا می‌گردد. معادله سطح در زمان n ام و با استفاده از مختصات موضعی توسط رابطه زیر معرفی می‌شود:

$$n_x^{(n)}x + n_y^{(n)}y = b^{(n)} \quad (18-2)$$

در این رابطه $n_x^{(n)}$ و $n_y^{(n)}$ مولفه های بردار عمود بر سطح و $b^{(n)}/n_x^{(n)}$ طول از مبدا سطح می‌باشد. حال برای انتقال سطح، ابتدا سطح در یک جهت x یا y جابجا شده و با توجه به هندسه جدید سطح، مقادیر F در هر سلول محاسبه می‌شود.

برای جابجایی در راستای x ، می‌بایستی مولفه‌ی x سرعت نقاط روی سطح، مشخص شود. چون در کد حاضر از شبکه جابجا شده استفاده شده است، سرعت نقاط در روی وجوه عمودی با استفاده از میانبایی به دست می‌آید.

برای بدست آوردن شکل سطح در زمان t_{n+1} لازم است در راستای y نیز جابجائی صورت گیرد. لذا مختصات جدید در زمان $n+1$ نمی‌باشد. به همین دلیل علامت $*$ را برای آن انتخاب کردیم. بنابراین معادله جدید سطح در اثر جابجایی در راستای x به فرم زیر در می‌آید:

$$n_x^*x + n_y^*y = b^* \quad (19-2)$$

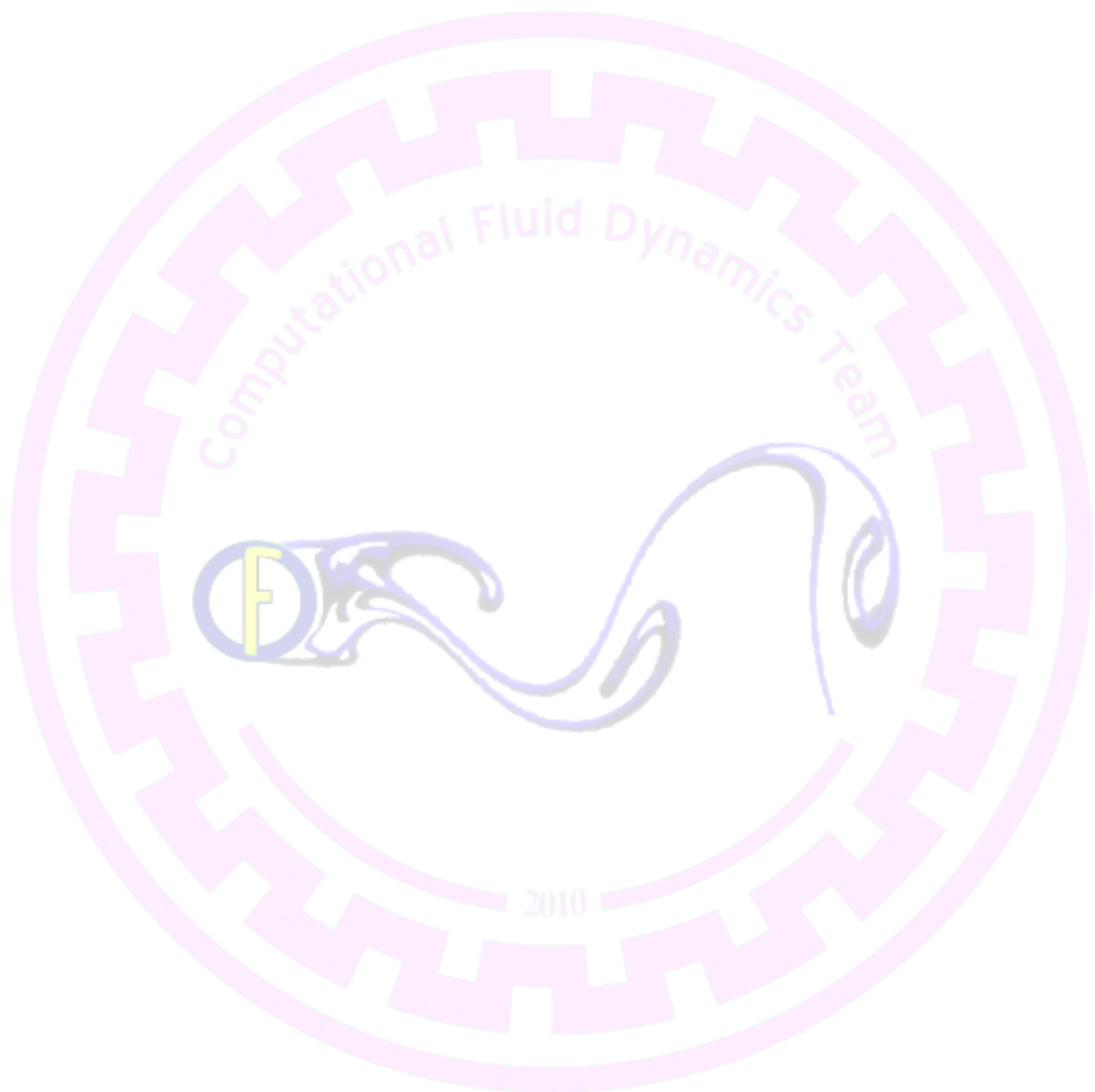
که در این معادله ضرایب عبارتند از:

$$\begin{aligned} n_x^* &= \frac{n_x^{(n)}}{(1 + (u_R - u_l)\Delta t / h)} \\ n_y^* &= n_y^{(n)} \\ b^* &= b^{(n)} + \frac{n_x^{(n)}u_l\Delta t}{(1 + (u_R - u_l)\Delta t / h)} \end{aligned} \quad (20-2)$$

که در آن $h = \Delta x = \Delta y$ و u_l و u_R به ترتیب سرعت روی وجوه راست و چپ سلول می‌باشند.



با استفاده از این معادله جدید میزان حجم انتقال یافته به سلول مجاور تعیین می‌شود و حجم باقیمانده در سلول مقدار جدید F را مشخص می‌کند. در جابجایی بعدی که در راستای y است، مقدار F در زمان t_{n+1} بدست می‌آید. روابط در جابجایی در راستای y مشابه همین روابط بوده با این تفاوت که این بار در راستای y مختصات تغییر می‌کند.





فصل سوم جریان‌های متلاطم

۳-۱ مقدمه

از آنجا که در این تحقیق از مدل‌های بزرگ^۱ برای مدل کردن عبارات تلاطم در معادلات حاکم استفاده می‌شود و نهایتاً قرار است که نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج حل مستقیم^۲ مقایسه شود، بنابر این لازم است که روش شبیه‌سازی ادی‌های بزرگ و همچنین حل مستقیم توضیح داده شوند و با یکدیگر مقایسه گردند. در روش *LES*، مقیاس‌های بزرگ تر جریان توربولانس، به طور مستقیم حل می‌شوند در حالی که مقیاس‌های کوچک مدل می‌شوند. از نقطه نظر هزینه محاسباتی روش *LES* ارزان تر از روش *DNS* و گران تر از مدل تنش رینولدز^۳ می‌باشد. توانایی روش *LES* در پیش بینی رفتار مقیاس‌های بزرگ جریان و همچنین دقت و صحت بالای نتایج نسبت به مدل تنش رینولدز باعث شده تا محققان به سمت این روش کشیده شوند.

همان طور که می‌دانیم در روش *DNS* هزینه محاسبات زیاد می‌باشد و افزایش این هزینه‌ها به طور تصاعدی متناسب با توان سوم عدد رینولدز، باعث شده تا روش *DNS* به یک روش غیر کاربردی در جریان‌های با عدد رینولدز بالا تبدیل شود. اخیراً اکثر تلاش‌های محاسباتی *DNS*، تنها به حرکت‌های اتلافی کوچک محدود می‌شود. و این در عین حالی می‌باشد که انرژی به طور گسترده در مقیاس‌های بزرگ جریان‌ها ذخیره شده است.

در روش *LES*، دینامیک حرکت مقیاس‌های بزرگ به طور کامل مورد محاسبه قرار می‌گیرد، که البته این مقیاس‌های بزرگ جریان کاملاً به شکل هندسی مسئله وابسته می‌باشند و اصلاً یک شکل عمومی

^۱ *LES*

^۲ *DNS (Direct Numerical Simulation)*

^۳ *Reynolds Stress model*



واحد ندارند. اما تاثیر مقیاس های کوچک تر جریان با یک مدل ساده ارائه می شود که معمولا این مقیاس های کوچک دارای خصوصیات یکسان و عمومی می باشند.

پس در مقایسه با DNS در این روش از مقیاس های کوچک صرف نظر می شود در نتیجه از هزینه های اضافی جلوگیری شده است. در روش LES چهار مرحله مفهومی وجود دارد:

۱. اپراتور فیلترگیری که سرعت U را به دو بخش تجزیه می کند. مولفه اول $\bar{U}(x, t)$ می باشد که به آن بخش فیلتر شده Filtered or Resolved گفته می شود و مولفه دوم که باقیمانده سرعت می باشد $\bar{U}(x, t)$ می باشد که به آن بخش SGS (Sub Grid Scale) گفته می شود. بخش $\bar{U}(x, t)$ سه بعدی و وابسته به زمان است که مربوط به حرکت ادی های بزرگ جریان توربولانس می باشد.

۲. معادلات میدان سرعت فیلتر شده از معادلات ناویر استوکس با اعمال اپراتور فیلترینگ بدست می آید. این معادلات فرم استاندارد معادلات بقا مومنتم می باشند.

۳. تکامل روش با مدل کردن تانسور تنش پسماند، که اغلب به سادگی با مدل ادی-ویسکوز^۱ مدل می شود.

۴. حل عددی معادلات فیلتر شده برای بدست آوردن میدان سرعت فیلتر شده، که یک تقریب بسیار خوبی برای حرکت مقیاس های بزرگ، برای درک بهتر جریان توربولانس بدست می آید. روش شناسایی LES و توسعه آن وابسته به نوع جریان فرض شده و روش عددی استفاده شده در مدل، می باشد.

۲-۳ فیلتر کردن

۳-۲-۱ تعریف عمومی فیلترینگ

اپراتور عمومی فیلترینگ توسط لئونارد^۲ در سال ۱۹۷۴ به صورت زیر معرفی شد:

(۱-۳)

به طوری که انتگرال روی حوزه ورودی جریان گرفته می شود و تابع خاص فیلتر G باید شرایط زیر را ارضا کند:

(۲-۳)

$$\int G(r, x) dr = 1$$

^۱ Eddy-Viscosity Model

^۲ Leonardo



در یک پروژه ساده تابع فیلتر، همگن و وابسته به x می‌باشد. میدان سرعت باقیمانده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u'(x, t) \equiv U(x, t) - \bar{U}(x, t) \quad (3-3)$$

بنابراین میدان سرعت به صورت زیر تجزیه خواهد شد:

$$U(x, t) = \bar{U}(x, t) + u'(x, t) \quad (4-3)$$

این نوع تجزیه میدان سرعت برای اولین بار توسط رینولدز انجام شده است. تفاوت عمده آن در این مطلب است که $\bar{U}(x, t)$ به صورت اتفاقی می‌باشد و به طور کلی فیلتر کردن بخش باقیمانده همواره مخالف صفر می‌باشد یعنی:

$$\bar{u}'(x, t) \neq 0 \quad (5-3)$$

برای نشان دادن تفاوت بین فیلترینگ و متوسط‌گیری نسبت به زمان به مثال زیر توجه شود.
برای متوسط‌گیری زمانی رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \overline{\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)} \quad (6-3)$$

اما اگر میدان سرعت و اپراتور فیلترگیری نسبت به مکان یعنی x_j گرفته شود، داریم:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \overline{\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)} + \int U_i(x-r, t) \frac{\partial G(r, x)}{\partial x_j} dr \quad (7-3)$$

۲-۲-۳ فیلترینگ در یک بعد

خواص مختلف فیلترگیری اغلب به سادگی در یک بعد آزموده می‌شود. برای درک بیشتر ما یک تابع اسکالر $U(x)$ را تعریف می‌کنیم که دامنه آن برای همه x ها می‌باشد: $(-\infty < x < \infty)$
بسط یک میدان برداری سه‌بعدی ما را به این تفکر نزدیک می‌کند که $U(x)$ به عنوان میدان برداری سه‌بعدی و $G(r)$ به عنوان یک فیلتر همگن در نظر بگیریم. در این صورت فیلترینگ میدان سرعت به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\bar{U}(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(r) U(x-r) dr \quad (8-3)$$

معمولاً سه نوع فیلتر جعبه‌ای، گوسین و فیلتر طیفی بیش از انواع

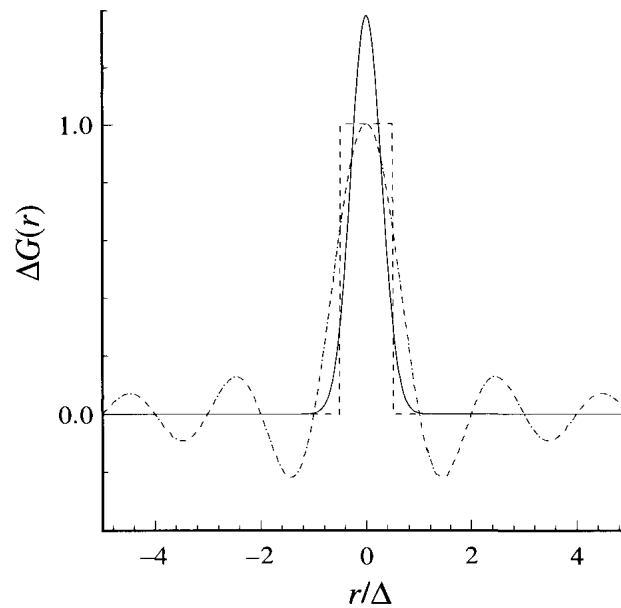
دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند. فیلتر جعبه‌ای برای متوسط‌گیری از $U(x)$ در یک بازه معین مثل استفاده می‌شود، که حاصل آن $\bar{U}(x)$ خواهد بود.

تابع فیلتر گوسین همان تابع توزیع گوس می‌باشد ولی با مقدار متوسط صفر و واریانس

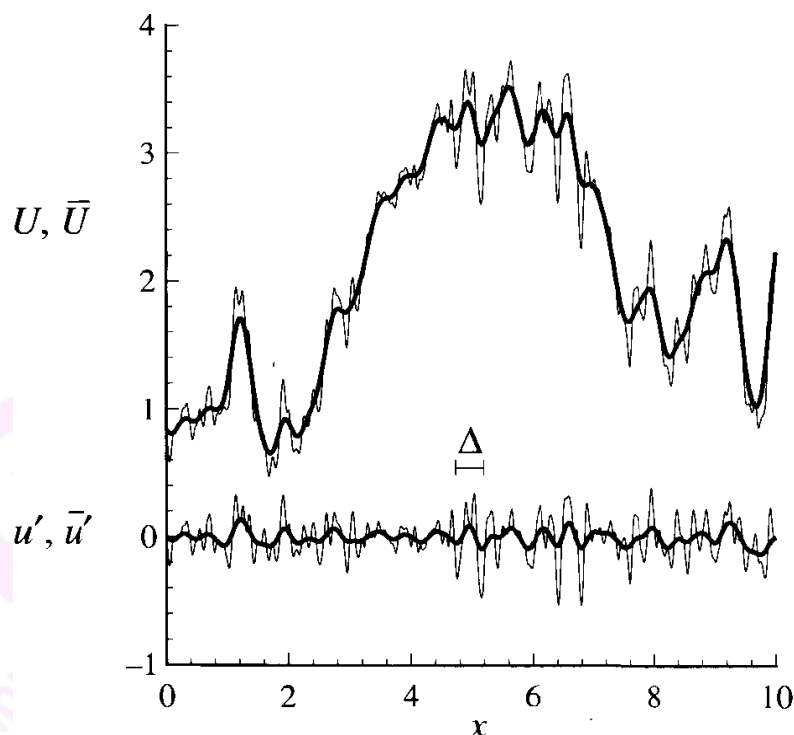
σ می‌باشد که مقدار آن برابر است با:



لازم به ذکر است که واریانس بیانگر میزان تغییر در $\int_{-\infty}^{\infty} r^2 G(r) dr$ داخل یک داده آماری می باشد و تقریباً معادل مجموعه مربعات انحراف از معیار میانگین می باشد. مقدار σ^2 توسط لئونارد در سال ۱۹۷۴ انتخاب شده است و بیانگر گشتاور دوم گوس می باشد، برای درک بهتر انواع فیلترها می توان آنها را در شکل ۱-۲ مشاهده نمود.



شکل (۱-۳) خط چین: فیلتر جعبه ای، خط توپر: فیلتر گوسین، خط چین نقطه: فیلتر طیفی



شکل (۲-۳) میدان سرعت ساده و فیلترشده و میدان سرعت باقیمانده و فیلتر شده

برای مقایسه بین میدان سرعت ساده و فیلتر شده و درک بهتر عملکرد فیلترینگ می توان به شکل ۳-۲ توجه نمود. فیلتر استفاده شده در اینجا از نوع گوسین می باشد که پهنای $\Delta \approx 0.35$ فیلتر در نظر گرفته شده است. به صورت آشکارا مشخص می باشد که $\bar{U}(x)$ میدان سرعت فیلترشده به صورت عمومی از $U(x)$ پیروی می کند، و در حالت کلی شبیه آن می باشد با این تفاوت که از مقیاس های کوچک میدان صرف نظر شده است. همان طوری که در این شکل ملاحظه می شود مقدار فیلتر شده $\hat{U}$ یعنی $\bar{U}$ مقداری مخالف صفر می باشد.

۳-۲-۳ نمایش طیفی

تاثیر فیلتر گیری به طور کامل در فضای عدد موج آشکار می شود. برای درک بهتر مطلب تابع $U(x)$ که یک تابع تغییر شکل فوری می باشد را به صورت زیر فرض کنید:

$$\hat{U}(\kappa) \equiv \mathcal{F}\{U(x)\} \quad (9-3)$$

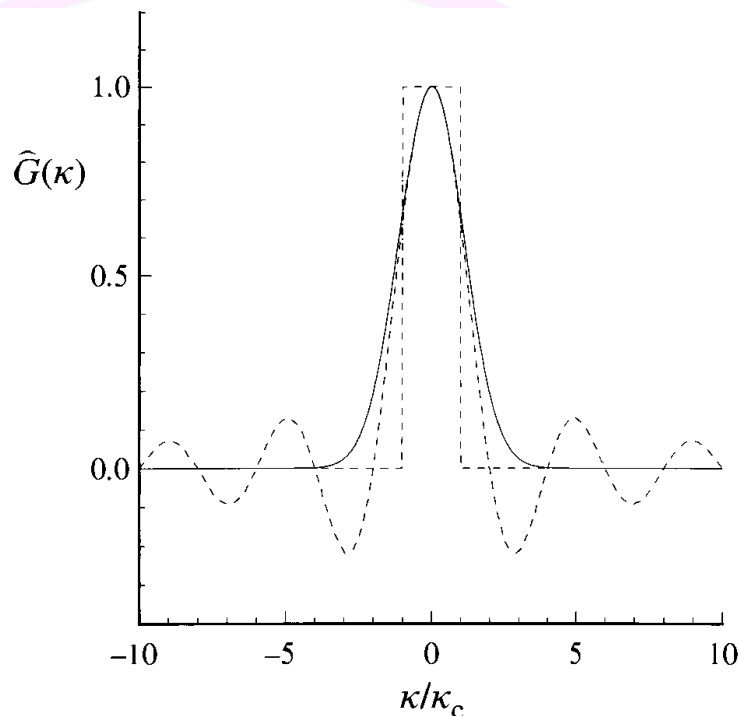
این تبدیل فوری بعد از فیلتر گیری میدان سرعت به صورت زیر می باشد:

$$\hat{\bar{U}}(\kappa) \equiv \mathcal{F}\{\bar{U}(x)\} = \hat{G}(\kappa) \hat{U}(\kappa) \quad (10-3)$$

که در این رابطه $\hat{G}(\kappa)$ تابع انتقال با زمان 2π می‌باشد که فیلترگیری آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{G}(\kappa) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(r) e^{-i\kappa r} dr = 2\pi \mathcal{F}\{G(r)\} \quad (11-3)$$

که این فیلترگیری به طور مستقیم از معادله فیلترگیری (۸-۳) پیروی می‌کند. توابع انتقال برای انواع مختلف فیلترها در جدول (۲-۳) آورده شده است و در شکل (۳-۳) تابع فیلتر G نمایش داده شده است.



شکل (۳-۲) خط‌چین: فیلتر تابع انتقال جعبه‌ای، خط‌توپر: فیلتر تابع انتقال گوسین، خط‌چین نقطه: فیلتر طیفی

مقدار تابع انتقال برابر واحد می‌باشد و باید در شرایط زیر صدق کند.

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(r) dr = \hat{G}(0) = 1 \quad (12-3)$$

در اینجا مفهوم فیلتر طیفی به طور واضح آشکار می‌شود. این نوع فیلترگیری همه‌ی مودهای فوریه‌ای که عدد موج آن کوچکتر از عدد موج میان بر باشد از بین می‌برد که این عدد موج به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa_c \equiv \frac{\pi}{\Delta} \quad (13-3)$$



این باعث می‌شود تا بعد از فیلترگیری اثر عدد موج‌های کوچکتر از بین برود. به عنوان جمع‌بندی می‌توان این‌گونه بیان کرد که برای فضای فیزیکی از فیلتر جعبه‌ای استفاده می‌شود، برای فضای عدد موج از فیلتر طیفی استفاده می‌شود. فیلتر گوسین هم به گونه‌ای می‌باشد که در هر دو فضای فیزیکی و طیفی جواب می‌دهد. پس استفاده از انواع فیلترها وابسته به نوع مسئله از نظر فیزیکی یا طیفی می‌باشد.

۳-۳ معادلات بقا فیلترشده

معادلات بقا میدان سرعت فیلترشده $\bar{U}(x, t)$ از به کار بردن اپراتور فیلترینگ، بر روی معادلات ناویر استوکس بدست می‌آید. اگر ما یک فیلتر فضایی یکنواخت را فرض کنیم بنابراین معادله پیوستگی فیلتر شده برابر است با:

(۱۴-۳)

و با توجه به این رابطه می‌توانیم بدست آوریم:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i - \bar{U}_i) = 0. \quad (15-3)$$

که در هر دو رابطه بالا میدان سرعت فیلتر شده $\bar{U}(x, t)$ و میدان سرعت باقیمانده سلونوئیدی می‌باشند.

بقا مومنتوم:

معادله مومنتوم فیلترشده به سادگی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \quad (16-3)$$

که در این رابطه $\bar{P}$ میدان فشار فیلتر شده می‌باشد. البته این معادله با معادله ناویر استوکس فیلترشده متفاوت می‌باشد زیرا نتیجه فیلتر شده عبارت $\bar{U}_i \bar{U}_j$ متفاوت از نتیجه فیلتر شده عبارت می‌باشد. این اختلاف بر سر تانسور تنش باقیمانده می‌باشد که به صورت زیر تعریف

می‌شود.

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle U_i U_j \rangle - \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \quad (17-3)$$

که این رابطه مشابه تانسور تنش رینولدز می باشد، یعنی :

$$\tau_{ij}^R \equiv \overline{U_i U_j} - \overline{U_i} \overline{U_j} \quad (18-3)$$

قابل ذکر است که تانسور تنش به صورت $-\rho \tau_{ij}^R$ یا $-\rho \langle u_i u_j \rangle$ می باشد. انرژی جنبشی باقیمانده به صورت زیر می باشد:

$$k_r \equiv \frac{1}{2} \tau_{ii}^R \quad (19-3)$$

و تانسور تنش باقیمانده غیرایزوتروپ با عبارت زیر تعریف می شود:

$$\tau_{ij}^r \equiv \tau_{ij}^R - \frac{2}{3} k_r \delta_{ij} \quad (20-3)$$

و تنش باقیمانده ایزوتروپ شامل ترم فشار فیلترشده تصحیح شده می باشد یعنی:

$$\bar{p} \equiv \overline{p} + \frac{2}{3} k_r \quad (21-3)$$

با این تعاریف معادله مومنتوم فیلتر شده یعنی معادله ۳-۵ می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\frac{\overline{D} \overline{U}_j}{\overline{D} t} = \nu \frac{\partial^2 \overline{U}_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}^r}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \quad (22-3)$$

جائیکه مشتق مادی بر روی میدان سرعت فیلترشده به صورت مقابل می باشد:

$$\frac{\overline{D}}{\overline{D} t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \overline{\mathbf{U}} \cdot \nabla \quad (23-3)$$

مطابق معمول دیورژانس معادله مومنتوم، یک معادله پواسون^۱ برای فشار تصحیح شده $\bar{p}$ را نتیجه می دهد. همان طور که مشاهده می شود معادلات رینولدز برای $\langle \mathbf{U} \rangle$ و معادلات فیلتر شده برای $\overline{\mathbf{U}}$ معادلاتی به اصطلاح باز می باشند، به عنوان مثال معادلات (۳-۱۴) و (۳-۲۲) همین گونه می باشند.

بسته شدن این معادلات با مدل کردن تانسور تنش باقیمانده و یا تانسور تنش SGS یعنی τ_{ij}^r اتفاق می افتد، که این مطلب در بخش چهارم به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته شده است. در چند رابطه مهم، معادلات فیلترشده کاملاً متفاوت از معادلات رینولدز می باشند. یک میدان جریان حتی اگر همگن و یا پایدار آماری باشد می تواند شامل $\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t)$ و $\bar{P}(\mathbf{x}, t)$ و $\tau_{ij}^r(\mathbf{x}, t)$ باشد و حتی سه بعدی و اتفاقی باشد. در مجموع اگرچه تانسور تنش مدل می شود اما همچنان به نوع و پهنای فیلتر استفاده شده بستگی خواهد داشت با توجه به τ_{ij}^r یک مدل تنش باقیمانده ارائه خواهد شد که می توانند حل شوند تا مقادیر $\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t)$ و $\bar{P}(\mathbf{x}, t)$ را بدست آورند.

^۱ Poisson eq



۳-۴ تجزیه تنش باقیمانده

مسئله بسته شدن معادلات در روش LES، از ترم های جابجایی غیرخطی در معادلات ناویر استوکس ناشی می شود، که می توان در معادلات ۲-۳ و ۷-۳ ملاحظه نمود که به صورت زیر تجزیه می شود.

$$\overline{U_i U_j} = \overline{U_i} \overline{U_j} + \tau_{ij}^R = \overline{U_i} \overline{U_j} + \tau_{ij}^r + \frac{2}{3} k_r \delta_{ij}. \quad (24-3)$$

آقای لئونارد در سال ۱۹۷۴ یک نوع تجزیه از

تنش سه بعدی معرفی کرد که به صورت زیر می باشد: τ_{ij}^R نسبت به

$$\tau_{ij}^R = \mathcal{L}_{ij}^o + \mathcal{C}_{ij}^o + \mathcal{R}_{ij}^o \quad (25-3)$$

همان طور که ملاحظه می شود این تنش به سه ترم تجزیه شده است که ترم اول آن تنش لئونارد^۱ نام دارد به صورت زیر می باشد:

$$\mathcal{L}_{ij}^o \equiv \overline{\overline{U_i U_j}} - \overline{U_i} \overline{U_j} \quad (26-3)$$

ترم دوم تنش متقاطع^۲ نام دارد و به صورت:

$$\mathcal{C}_{ij}^o \equiv \overline{\overline{U_i u_j}} + \overline{\overline{u_i U_j}} - \overline{\overline{U_i u_j}} - \overline{\overline{u_i U_j}} \quad (27-3)$$

و ترم سوم، همان تنش رینولدز^۳ می باشد که برابر است با:

$$\mathcal{R}_{ij}^o \equiv \overline{u_i' u_j'} - \overline{u_i'} \overline{u_j'} \quad (28-3)$$

با استفاده از فیلتر طیفی یک تجزیه نسبتاً بهتری ارائه شده است که:

$$\overline{U_i U_j} = \overline{\overline{U_i U_j}} + \tau_{ij}^k \quad (29-3)$$

در اینجا تانسور باقیمانده به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^k &= \overline{u_i U_j} + \overline{u_j U_i} + \overline{u_i u_j} \\ &= \mathcal{C}_{ij}^o + \mathcal{R}_{ij}^o. \end{aligned} \quad (30-3)$$

این نوع تجزیه برتر است زیرا هر مولفه تنش یک کمیت فیلتر شده می باشد پس بنابراین می تواند به صورت دقیق خود را در ترم های بدست آمده ارائه دهد.

¹ Leonard Stress

² Cross Stress

³ SGS Reynolds Stress



۳-۵ مدل اسماکورینسکی^۱

به منظور بسته شدن معادلات برای بدست آوردن میدان سرعت فیلتر شده، یک مدل برای تانسور تنش باقیمانده غیرایزوتروپ یعنی τ_{ij}^r نیاز می باشد. ساده ترین مدل به وسیله اسماکورینسکی در سال ۱۹۶۳ ارائه شده است که اساس چندین مدل پیشرفته که بعداً در مورد آن حرف می زنیم خواهد شد.

۳-۵-۱ تعریف مدل

این مدل در دو قسمت دیده می شود که قسمت اول آن یک مدل خطی ادی-ویسکوز به صورت زیر می باشد:

$$\tau_{ij}^r = -2\nu_r \bar{S}_{ij} \quad (3-31)$$

که این قسمت برای ارتباط دادن تنش باقیمانده به نرخ کرنش فیلتر شده استفاده می شود. که ضریب تناسب $\nu_r(x, t)$ حرکت باقیمانده ادی-ویسکوز می باشد. واما دومین قسمت، مشابه فرضیه طول اختلاط می باشد که ویسکوزیته در آن به صورت زیر مدل می شود:

$$\begin{aligned} \nu_r &= \ell_s^2 \bar{S} \\ &= (C_s \Delta)^2 \bar{S} \end{aligned} \quad (3-32)$$

که در این رابطه $\bar{S}$ مشخصه نرخ کرنش فیلتر شده می باشد. و همچنین ℓ_s مقیاس طولی اسماکورینسکی است که این مقیاس طولی از ضرب ضریب اسماکورینسکی C_s در پهنای فیلتر Δ بدست آمده است. بر طبق مدل ادی-ویسکوز یعنی معادله (۳-۳۱) نرخ انتقال انرژی به حرکت باقیمانده برابر است با:

$$P_r \equiv -\tau_{ij}^r \bar{S}_{ij} = 2\nu_r \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} = \nu_r \bar{S}^2 \quad (3-33)$$

برای مدل اسماکورینسکی (و یا هر مدل ادی-ویسکوز دیگر با ν_r) این انتقال انرژی از حرکت فیلتر شده به حرکت باقیمانده در هر جایی هست.

۳-۵-۲ فیلتر اسماکورینسکی

با استفاده از خصوصیت طول مقیاس اسماکورینسکی ℓ_s معادلات LES، از مدل اسماکورینسکی استفاده می کند تا بتواند به صورت تقریبی میدان سرعت فیلتر شده را حل کند. برای یک توربولانس

¹ The Smagorinsky Model

$$\hat{G}(\kappa) = \left(\frac{\bar{E}(\kappa)}{E(\kappa)} \right)^{1/2}$$



همگن ایزوتروپ یک فیلتر ضمنی منحصر به فرد وجود دارد که برای محاسبه طیف های ثابت به کار می رود که آن را فیلتر اسماغورینسکی گویند. این فیلتر توسط آقای پاپ^۱ در سال ۱۹۹۸ بدست آمده است. در یک جریان توربولانس ایزوتروپ فرضی، از روش DNS برای محاسبه تابع انرژی طیفی ذرات استفاده می شود یعنی $E(\kappa)$ اما در همان جریان فرضی از روش LES با استفاده از مدل اسماغورینسکی برای محاسبه میدان انرژی طیفی فیلتر شده استفاده می شود یعنی $\bar{E}(\kappa)$. بنابراین در اصل هر دو طیف $E(\kappa)$ و $\bar{E}(\kappa)$ می توانند محاسبه شوند. این طیف ها به وسیله تابع فیلتر انتقال^۲، $\bar{G}(\kappa)$ بر طبق معادله ۲-۱۶ به صورت زیر می باشد:

(۳۴-۳)

این تابع انتقال، فیلتر اسماغورینسکی می باشد که تنها با این فیلتر میدان سرعت فیلتر شده طیفی از روش DNS، شبیه میدان سرعت فیلتر شده بدست آمده از روش LES می شود. همچنین فیلتر اسماغورینسکی می تواند جریان توربولانس ایزوتروپ با عدد رینولدز بالا و برای l_s کوچک تر از طول مقیاس انتگرالی را تخمین بزند. $(l_s/L_{11} \ll 1)$.

این موفقیت به واسطه تخمین $E(\kappa)$ و $\bar{E}(\kappa)$ می باشد و برای $E(\kappa)$ ما از فرض مدل طیفی به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$E(\kappa) = f_L(\kappa L) C \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \exp[-\frac{3}{2} C(\kappa \eta)^{4/3}] \quad (35-3)$$

برای تخمین $\bar{E}(\kappa)$ در مدل اسماغورینسکی $\bar{S}$ تقریب زده می شود با $\langle \bar{S}^2 \rangle^{1/2}$. پس ویسکوزیته باقیمانده برابر است با:

$$\nu_r = \ell_s^2 \langle \bar{S}^2 \rangle^{1/2} \quad (36-3)$$

که غیر تصادفی و یکنواخت می باشد. در این صورت معادله مومنتوم LES یعنی معادله ۲-۹ به صورت زیر بدست می آید:

(۳۷-۳)

که این معادله همانند معادله ناویر استوکس می باشد بجز تاثیر ویسکوزیته که $\nu + \nu_r$ می باشد. بنابراین حل LES از معادله بالا شبیه حل DNS از معادلات ناویر استوکس در یک عدد رینولدز پایین با ضریب $\nu_r/\nu + 1$ می باشد. اثر مقیاس کولوموگراف نیز این گونه تعریف می شود:

¹ Pope

² Filter-Transfer Function



$$\bar{\eta} \equiv \left(\frac{(v + v_r)^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} = \ell_s \left(1 + \frac{v}{v_r} \right)^2 \quad (38-3)$$

که این مقیاس در مقایسه با مقیاس انتگرالی کوچک می باشد. نهایتاً روش LES منجر به انرژی زیر می شود:

$$\bar{E}(\kappa) = f_L(\kappa L) C \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \exp[-\frac{3}{2} C (\kappa \bar{\eta})^{4/3}] \quad (39-3)$$

با این تقریب ها تابع انتقال فیلتر اسماغورینسکی از معادله (34-3) نتیجه خواهد شد. البته شایان ذکر است که این فیلتر تقریبی بوده، بدین معنی که از نوسانات $\bar{\tau}$ صرف نظر شده است، و به شکل فرض شده برای توزیع طیفی وابسته می باشد.

۳-۶ آزمون کارایی مدل

به طور کلی برای آزمایش یک مدل از دو روش نسبتاً متفاوت در LES استفاده می شود. این دو روش عبارتند از روش آزمایش قیاسی^۱ و روش آزمایش استقرایی^۲. در یک تست قیاسی از آزمایش و یا داده های روش DNS استفاده می شود تا به طور مستقیم دقت مدل بررسی شود. اما در تست استقرایی مدل، برای انجام محاسبات برای یک جریان توربولانس مورد استفاده قرار می گیرد و دقت محاسبات به طور آماری مورد بررسی قرار می گیرد. و این کاملاً طبیعی می باشد که نتایج بدست آمده از تست قیاسی از اعتبار و دقت بیشتری برخوردار باشد.

برای یک جریان توربولانس همگن، یک تست قیاسی از مدل اسماغورینسکی توس فرزیگر-کلارک^۳ در سال ۱۹۷۹ گزارش شد که به پیش بینی تنش باقیمانده پرداخته بود و نتایج از دقت خوبی برخوردار بوده است.

۳-۷ پیشرفت در مدل تنش باقیمانده^۴

در اینجا ما در فضای فیزیکی به بررسی کاربرد مدل تنش باقیمانده در جریان توربولانس همگن می پردازیم. این مدل به دلیل کمبود های مدل اسماغورینسکی مورد توجه قرار گرفت.

¹ Priori testing

² Posteriori testing

³ Ferziger-clark

⁴ Residual-Stress Models



۳-۷-۱ مدل تشابه ابعادی

مدل اسماغورینسکی اثر تنش های عرضی را به خوبی مدل نمی کند. جمله تنش عرضی معرف اثر ادی های کوچک و بزرگ روی همدیگر است. به هر حال مدل کردن این جمله با تنشهای ادی های کوچک مشکل است چون ماهیت آنها با یکدیگر تفاوت دارد. جمله تنش عرضی مربوط به تقابل ادی های ریز و درشت روی همدیگر و نیروهای بین آنها می شود، در حالی که جمله تنشهای ادی های ریز بیان کننده اثر اتلافی ادی های ریز روی میدان جریان فیلتر شده است با استفاده از مدل تشابه ابعادی باردینا اضافه کردن اثر تنشهای عرضی در مدل می توان به نتایج دقیقتری دست یافت. ایده مدل تشابه ابعادی بر این اساس است که تقابل بین ادی های بزرگ و کوچک مشابه است با تقابل بین کوچکترین ادی از ادی های بزرگ با بزرگترین ادی از ادیهای کوچک. بنابراین مدل تشابه ابعادی با توجه به این مفهوم و تشابه بین این دو اشل به صورت زیر بیان می شود.

(۴۰-۳)

بنابراین :

(۴۱-۳)

که در آن $(\bar{u}_i)$ یعنی دوبار فیلتر کردن سرعت و C_B ثابت باردینا است.

۳-۷-۲ مدل دینامیکی

اولین مشکل در استفاده از مدل اسماغورینسکی تعیین مقدار مناسب برای ضریب C_ϵ می باشد. که این ضریب از رژیم جریان تا رژیمی دیگر کاملاً متفاوت بوده، به خصوص اگر در جریان لمینار مقدار آن صفر باشد. مدل دینامیکی یک روش برای تخمین یک مقدار محلی مناسب برای ضریب اسماغورینسکی ارائه می دهد. این مدل توسط جرمانو^۱ در سال ۱۹۹۱ ارائه شد و بعداً در سال ۱۹۹۶ توسط لی^۲ لی^۲ تصحیح شد و پیشرفت پیدا کرد.

^۱ Germano

^۲ Lilly



در مدل دینامیکی جرمانو و همکاران ، مقدار محلی این ضریب، در هر نقطه از شبکه میدان حل بصورت دینامیکی تعیین می شود. در این روش، مقدار تنش ادی های ریز (اشل های کوچک) بر مبنای یک بار فیلتر گیری و دو بار فیلترگیری به ترتیب توسط روابط زیر تعریف می شود :

$$\tau_{ij}^R = \overline{U_i U_j} - \overline{U_i} \overline{U_j} \quad (42-3)$$

$$T_{ij} = \overline{\tilde{U}_i \tilde{U}_j} - \overline{\tilde{U}_i} \overline{\tilde{U}_j} \quad (43-3)$$

با فیلتر کردن از رابطه (42-3) و کم کردن از رابطه (43-3) ، داریم :

$$(44-3)$$

L_{ij} مقدار تنش ادی های ریز بر مبنای سرعت فیلتر شده می باشد. با استفاده از مدل اسماغورینسکی و روابط (43-3) و (42-3) ، قسمت غیر ایزوتروپیک تنش های τ_{ij}^R و T_{ij} بصورت زیر تعریف می شود .

$$\tau_{ij}' = \tau_{ij}^R - \frac{1}{3} \tau_{kk}^R \delta_{ij} = -2c_s \overline{\Delta}^2 \overline{S} \overline{S}_{ij} \quad (45-3)$$

$$(46-3)$$

با شرط ثابت بودن ضریب c_s (مجذور ضریب اسماغورینسکی) در روابط بالا ، مقدار M_{ij} بصورت زیر تعریف می شود:

$$(47-3)$$

از معادله های (45-3) و (46-3) ، می توان مقدار L_{ij}^S (رابطه 3-43) را به M_{ij} ارتباط داد:

$$(48-3)$$

که L_{ij}^S قسمت غیر ایزوتروپیک L_{ij} بر مبنای مدل اسماغورینسکی است.

قسمت ایزوتروپیک L_{ij} طبق رابطه زیر تعریف می شود

$$(49-3)$$

$$L_{ij}^d = L_{ij} - \frac{1}{3} L_{kk} \delta_{ij}$$

در حل عددی به روش ادی‌های بزرگ، مقادیر M_{ij} و L_{ij} بصورت تابعی از زمان و مکان بر مبنای سرعت فیلتر شده، قابل محاسبه هستند. با استفاده از این دو متغیر قابل محاسبه، می‌توان ضریب c_s (مجذور ضریب اسماغورینسکی) را بصورت دینامیکی در حل عددی تعیین نمود. لیلی در سال ۱۹۹۲ نشان داد که مقدار ضریب c_s را بر مبنای کمترین خطای متوسط مربعات با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید

(۵۰-۳)

$$c_s = \frac{M_{ij}L_{ij}}{M_{lk}M_{lk}}$$

