

حل عددی جریان سیال دو فازی در محیط متخلخل توسط روش فلاکس محدود کننده و مقایسه نتایج حاصله با نتایج روش های کلاسیک

بهار فیروز آبادی (استادیار)، نیما شکری (دانشجوی ارشد)

چکیده

در حالت جریان هم دما یا جریان بدون انتقال حرارت و با فرض سرعت کم سیال، معادلات حاکم بر محیطهای متخلخل شامل معادله بقای جرم و معادله دارسی می باشد. از ترکیب معادله دارسی و معادله بقای جرم و حذف متغیر فشار، معادله درصد حجمی در محیطهای متخلخل بدست می آید که یک معادله جابجایی-نفوذ است. چنانچه از اثرات فشار موینگی صرفنظر شود، یا به عبارتی ترم نفوذ در مقابل ترم جابجایی قابل صرفنظر باشد، این معادله به یک معادله هذلولوی غیر خطی تبدیل می شود که معادله Buckley-Leverett نام دارد. حل این معادله نشان دهنده حرکت سیال دو فاز در محیطهای متخلخل می باشد. با توجه به غیر خطی بودن این معادله، جهت حل آن از روش های عددی استفاده می شود. در این مقاله معادله باکلی-لورت با استفاده از روش فلاکس محدود کننده حل شده است و برای حل آن از چهار محدود کننده مختلف Minmod، Vanalbad، Vanleer و Roe's Superbee استفاده شده است. علاوه بر این، معادله فوق با استفاده از روشهای کلاسیک مرتبه اول و دوم Lax-Friedrich، First order Upwind، Lax-Wendroff و نیز حل شده است و در نهایت جوابهای هفت روش فوق با یکدیگر و همچنین با جوابهای روش مشخصه ها (MOC) مقایسه شده اند. نتایج نشان می دهد که استفاده از روش فلاکس محدود کننده (Limiter) می تواند به حذف عیوب نوسانی بودن جواب ها و کاهش دیفیوژن عددی بیانجامد.

مقدمه

مدل سازی جریان چند فازی در محیطهای متخلخل کاربردهای فراوانی در مسایل مختلف مهندسی دارد. برداشت نفت از طریق تزریق آب به چاههای نفت مثالی از جریان دو فازی در محیط متخلخل می باشد. در این مقاله رفتار سیال دو فازی غیر قابل تراکم (نفت-آب) در محیط متخلخل تحلیل می شود. در این بررسی فرض می شود که انتقال جرمی بین دو فاز صورت نمی پذیرد و همچنین دو فاز امتزاج ناپذیر می باشند. معادلات حاکم بر سیال دو فاز در محیط متخلخل غیر خطی می باشند، لذا جهت حل آنها از روشهای عددی استفاده می نماییم. چنانچه در معادله درصد حجمی از اثرات فشار موینگی و گرانش صرفنظر شود، ماهیت معادله حاکم هذلولوی میباشد که به معادله Buckley-Leverett [1] مشهور می باشد. به طور کلی در بیشتر مواقع فرایند جریان سیال در

محیط متخلخل یک فرآیند با ماهیت جابجایی می باشد و اثرات نفوذ در مقابل اثرات جابجایی قابل صرف نظر کردن است [2] و همین امر سبب می شود که معادلات حاکم فرم هذلولوی داشته باشند. در جواب معادلات هذلولوی یک جبهه یا شوک وجود دارد. افراد مختلفی کارهای زیادی در زمینه مدل کردن این جبهه یا شوک انجام داده اند تا بتوانند این لبه تیز را با دقت بیشتری تقریب بزنند. آقایان Todd [1972]، Settari and Aziz [1975]، Aziz and Settari [1979]، Dahe [1995] و Binning and Celia [1999] بر روی معادله Buckley-Leverett و حل عددی آن تحقیق و بررسی نمودند. اگر از روشهای مرتبه اول کلاسیک برای حل معادله هذلولوی Buckley-Leverett استفاده شود، در نقاط هموار جوابهای نسبتاً مناسبی بدست خواهیم آورد، اما در نقاط ناپیوستگی و شوک نتایج دقیق و درستی بدست نمی آید و Numerical Dissipation زیاد می باشد [3]. چنانچه از روشهای مرتبه بالاتر استفاده نماییم، دقت جوابها در نقاط هموار بالا می باشد، اما در نزدیکی نقاط ناپیوستگی و شوک جوابها انحراف زیادی پیدا می کنند و Dispersion Numerical زیاد خواهد بود [4]. با تمام تلاش های فوق هم چنان نیاز به روش های عددی جدیدتر و به کار گیری این روش ها جهت حل معادله Buckley-Leverett جهت بدست آوردن جواب های دقیقی تر در نقاط شوک و ناپیوستگی و همچنین نقاط هموار احساس می شود.

در این مقاله برای غلبه بر مشکل مطرح شده از روش فلاکس محدود کننده استفاده شده است [3]. یک دسته از روشهای عددی دقت بالا روش فلاکس محدود می باشد که می توان از این روش جهت حل معادله کنسرواتو هذلولوی استفاده نمود. در این روش رابطه فلاکس کلی بصورت ترکیب فلاکس روشهای مرتبه پایین و مرتبه بالا نوشته می شود، به طوری که در نقاط هموار و پیوسته عمده تاثیر از آن فلاکس مرتبه بالاتر و در اطراف ناپیوستگی و شوک عمده تاثیر از آن فلاکس مرتبه پایین تر باشد. این مقاله یکی از کاربردهای فلاکس محدود کننده را برای حل عددی معادله Buckley-Leverett در حالت سیال دو فاز در محیط متخلخل نشان می دهد. در این مقاله معادله Buckley-Leverett با استفاده از چهار محدود کننده مختلف [3] Vanleer [3]، Roe's Superbee [3]، Minmod [4] و Vanalbada [4] به طور عددی حل شده است و علاوه بر این معادله فوق با روش های کلاسیک مرتبه اول و دوم [5] Lax-Friedrich، [6] First Order Upwind و [7] Lax-Wendroff نیز حل شده است و نتایج بدست آمده از روش های مختلف با یکدیگر و همچنین با جواب های حاصل از روش [8] MOC مقایسه شده و دقت و خطای هر روش برای حل این معادله مشخص شده است.

استخراج معادلات جریان یک بعدی و دو فازی در محیط متخلخل

جریان دو فاز امتزاج ناپذیر نفت و آب در محیط متخلخل بوسیله معادلات بقای جرم و قانون دارسی وصف می شود. برای استفاده از این معادلات فرض می شود که فضای خالی در محیط متخلخل فقط توسط دو فاز آب و نفت پر شده است و همچنین تفاوت فشارهای دو فاز برابر فشار موینگی می باشد. اگر از اثرات فشار موینگی در این معادلات صرف نظر شود، معادله درصد حجمی، یک معادله کنسرواتو غیر خطی خواهد شد. این معادله به معادله Buckley-Leverett معروف می باشد. معادله Buckley-Leverett در حالت بی بعد شده و یک بعدی که در آن از اثرات فشار موینگی صرف نظر شده باشد، برای فاز آب به فرم زیر می باشد:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial F_w}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

در معادله (۱) S_w درصد حجمی آب و F_w فلاکس Buckley-Leverett می باشد که به صورت زیر تعریف می شود: [9]

$$F_w = f_w [1 - (\frac{\lambda_n}{u})(\rho_w - \rho_n)g \sin \alpha] \quad (2)$$

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_n} \quad (3)$$

$$\lambda_w = \frac{k k_{rw}}{\mu_w} \quad (4)$$

$$\lambda_n = \frac{k k_{rn}}{\mu_n} \quad (5)$$

در این مقاله اندیس w برای فاز آب و اندیس n برای فاز نفت بکار می رود. در روابط بالا ρ_n و λ_n چگالی و ضریب تحرک نفت، α زاویه ایست که جریان با جهت مثبت محور x در جهت پادساعتگرد می سازد، u سرعت کلی جریان، μ_w و μ_n به ترتیب لزجت آب و نفت و k_{rw} و k_{rn} نفوذ پذیری نسبی برای فازهای نفت و آب می باشد. با جاگذاری معادلات (۴) و (۵) در معادله (۳) خواهیم داشت:

$$f_w = \frac{1}{1 + \frac{\mu_w k_{rn}}{\mu_n k_{rw}}} \quad (6)$$

در حقیقت نفوذپذیری نسبی به علت کاهش نفوذپذیری مطلق یک فاز به علت حضور فاز دیگر تعریف می شود که تابعی از درصد حجمی می باشد. در این مقاله از معادلات کوری با توان ۲ جهت بیان نفوذ پذیری نسبی استفاده شده است [10].

$$k_{rw} = S_w^2 \quad (7)$$

$$k_{rn} = (1 - S_w)^2 \quad (8)$$

با جاگذاری روابط کوری در معادله (۲) و با فرض اینکه جریان به صورت افقی می باشد ($\alpha = 0$) فلاکس Buckley-Leverett به ترتیب زیر بدست می آید:

$$F_w = \frac{S_w^2}{S_w^2 + \frac{\mu_w}{\mu_n}(1 - S_w)^2} \quad (9)$$

در این مقاله ویسکوزیته نفت ۴ برابر ویسکوزیته آب در نظر گرفته شده است، لذا فلاکس Buckley-Leverett که در حل عددی معادله Buckley-Leverett در این مقاله از آن استفاده شده است به فرم زیر می باشد:

$$F_w = \frac{S_w^2}{S_w^2 + \frac{1}{4}(1-S_w)^2} \quad (10)$$

در نتیجه معادله (۱) را می توان به فرم زیر نوشت که به معادله Buckley-Leverett مشهور است:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{S_w^2}{S_w^2 + \frac{1}{4}(1-S_w)^2} \right] \quad (11)$$

معادله (۱۱) معادله هذلولوی غیر خطی می باشد، که می توان آن را با روش های مختلف عددی مرتبه اول و دوم حل نمود. چنانچه برای حل معادله Buckley-Leverett از روش های مرتبه اول مانند First Order Upwind و Lax-Friedrich و یا روش های مرتبه دوم مانند Lax-Wendroff استفاده نماییم، جواب ها از دقت قابل قبولی در نزدیکی و اطراف نقاط ناپیوستگی و شوک بر خوردار نخواهند بود و با مقایسه این جواب ها با نتایج حاصل از روش MOC، در می یابیم که خطای موجود در جواب های بدست آمده از روش های عددی فوق، زیاد می باشد. در این مقاله جهت بدست آوردن جواب های دقیق تر معادله Buckley-Leverett از روش فلاکس محدود کننده [۳] استفاده شده است.

فلاکس محدود کننده:

جهت بدست آوردن جواب های دقیق تر از یک معادله غیر خطی می توانیم فلاکس یک روش مرتبه بالا (F_H) را که در نواحی هموار جواب های دقیقی ارائه می دهد را با فلاکس یک روش مرتبه پایین (F_L) که در اطراف نقاط ناپیوستگی و شوک جواب های بهتری نسبت به روش های مرتبه بالا ارائه می دهد را با هم ترکیب نماییم. این ترکیب می بایست به گونه ای باشد که فلاکس کلی در اطراف نواحی هموار برابر فلاکس مرتبه بالا (F_H) و در اطراف نقاط ناپیوستگی و شوک برابر فلاکس مرتبه پایین (F_L) باشد. در این روش می توان فلاکس یک روش مرتبه بالا را به صورت ترکیب فلاکس یک روش مرتبه پایین با یک بخش تصحیح مرتبه بالا در نظر گرفت.

$$F_H(S; j) = F_L(S; j) + [F_H(S; j) - F_L(S; j)] \quad (12)$$

در روش فلاکس محدود کننده اندازه ترم تصحیح (ترم دوم سمت راست معادله (۱۲)) بر اساس مقداری که درصد حجمی (S) در نقاط مختلف می گیرد توسط محدود کننده، محدود و کنترل می شود، به عبارتی

$$F_H(S; j) = F_L(S; j) + \phi(S; j) \times [F_H(S; j) - F_L(S; j)] \quad (۱۳)$$

در معادله (۱۳)، $\phi(S; j)$ محدود کننده فلاکس می باشد. چنانچه مقدار کمیت S در اطراف S_j هموار باشد، مقدار S میبایست نزدیک به عدد یک و در حضور ناپیوستگی و شوک مقدار S می بایست نزدیک به صفر باشد. بدین ترتیب معادله (۱۳) در نزدیکی نقاط هموار مانند فلاکس یک روش مرتبه پایین و در اطراف نقاط ناپیوستگی و شوک مانند فلاکس یک روش مرتبه بالا عمل می کند. روش ها و معیارهای مختلفی جهت تعیین همواری یا وجود شوک و ناپیوستگی در جواب ها، وجود دارد. یک روش برای این منظور استفاده از نسبت تغییرات جواب های متوالی [۱۱] که به فرم زیر تعریف می شود، میباشد:

$$\theta_j = \frac{S_j - S_{j-1}}{S_{j+1} - S_j} \quad (۱۴)$$

از رابطه (۱۴) واضح است که چنانچه θ_j نزدیک عدد یک باشد، آنگاه جواب ها در اطراف S_j هموار می باشد اما چنانچه θ_j با عدد یک اختلاف زیادی داشته باشد، آنگاه جواب ها در اطراف S_j می توانند بیانگر حضور شوک یا نقطه ناپیوستگی باشند. تابع محدود کننده $\phi(j)$ را به صورت تابعی از θ_j تعریف می شود.

$$\phi_j = \phi(\theta_j) \quad (۱۵)$$

قبل از استفاده از نوع محدود کننده جهت حل معادله Buckley-Leverett، این معادله با استفاده از روش Lax-Wendroff گسسته سازی می شود:

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [v_{i+1/2} (F_{i+1}^n - F_i^n) - v_{i-1/2} (F_i^n - F_{i-1}^n)] \quad (۱۶)$$

رابطه (۱۶) را می توان به فرم زیر باز نویسی کرد:

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (S_i^n - S_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (1 - v_{i+1/2}) (F_{i+1}^n - F_i^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - v_{i-1/2}) (F_i^n - F_{i-1}^n) \quad (۱۷)$$

با توجه به رابطه (۱۷) فلاکس را می توان به ترتیب زیر تعریف نمود:

$$F(S; J) = F_i^n + \frac{1}{2} (1 - v_{i+1/2}) (F_{i+1}^n - F_i^n) \quad (۱۸)$$

در فلاکس معادله (۱۸) ترم اول عبارت سمت راست معرف فلاکس روش مرتبه اول First Order Upwind و ترم دوم عبارت سمت راست، ترم تصحیح کننده مرتبه دوم می باشد. در این مرحله فلاکس محدود کننده را به ترتیب زیر تعریف می شود:

$$F(S; i) = F_i^n + \frac{1}{2} (1 - v_{i+1/2}) (F_{i+1}^n - F_i^n) \phi_i \quad (۱۹)$$

در معادله (۱۹)، ϕ_i معرف محدود کننده می باشد. از طرفی هر روش مرتبه دوم را می توان به فرم زیر نوشت:

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(S; i) - F(S; i-1)] \quad (20)$$

در رابطه (۲۰)، F فلاکس مرتبه دوم مربوط به روش بکار گرفته شده است. با جاگذاری رابطه (۱۹) در رابطه (۲۰) خواهیم داشت:

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ a(S_i^n - S_{i-1}^n) + \frac{1}{2} a(1 - v_{i+1/2}) [(S_{i+1}^n - S_i^n) \Phi_i - (S_i^n - S_{i-1}^n) \Phi_{i-1}] \right\} \quad (21)$$

در این مقاله جهت حل معادله Buckley-Leverett از چهار محدود کننده مختلف [3] Roe's Superbee، [3] Vanleer، [4] Vanalbada و [4] Minmod استفاده شده است که رابطه ϕ_i برای آنها به ترتیب زیر تعریف می شود:

Name of Flux Limiter	$\phi(\theta)$
Minmod	$\phi(\theta) = \max(0, \min(1, \theta))$
Roe's Superbee	$\phi(\theta) = \max(0, \min(2\theta, 1), \min(\theta, 2))$
Vanleer	$\phi(\theta) = \frac{ \theta + \theta}{1 + \theta }$
Vanalbada	$\phi(\theta) = \frac{\theta^2 + \theta}{1 + \theta^2}$

جدول ۱- ضابطه $\phi(\theta)$ برای چهار محدود کننده مختلف

شرایط اولیه و مرزی

در این مقاله معادله باکلی لورت برای سیال دو فاز یک بعدی و با شرایط مرزی و اولیه زیر حل شده است. درصد حجمی فاز آب $S(x, t)$ در نقاط مختلف در امتداد یک مسیر یک بعدی به طول L بعد از 0.3 ثانیه تزریق آب محاسبه شده است و فرضیات زیر انجام شده است.

$$L = 100 \text{ cm}$$

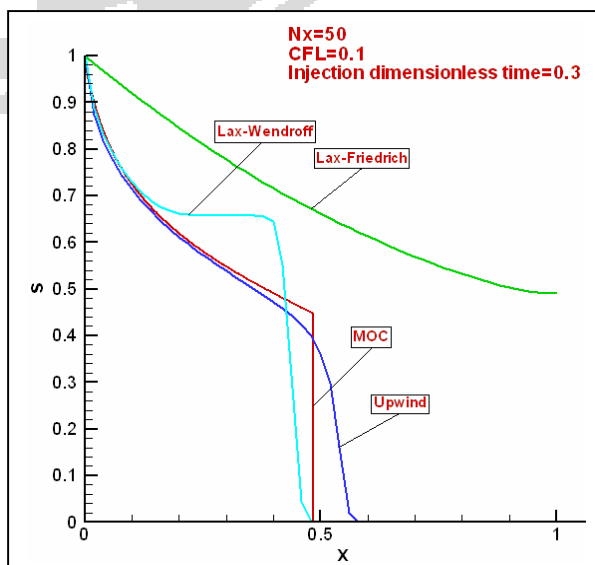
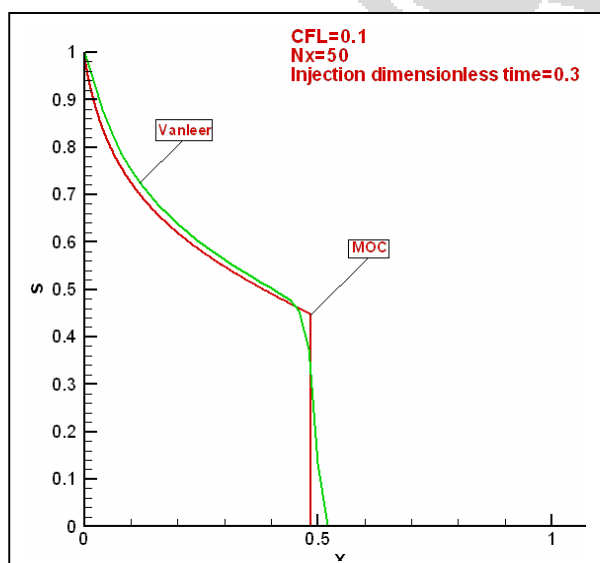
$$S(x, t=0) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$S(x=0, t) = 1$$

همچنین درصد حجمی نقطه انتهایی را برابر درصد حجمی نقطه ما قبل آخر در نظر می گیریم.

بحث در نتایج حاصل

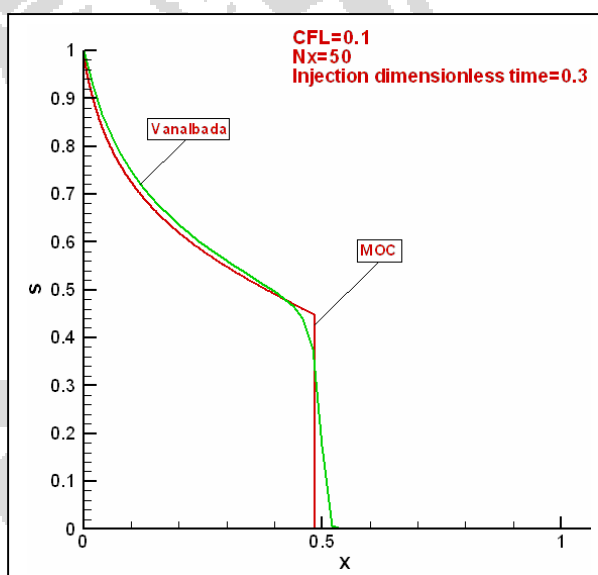
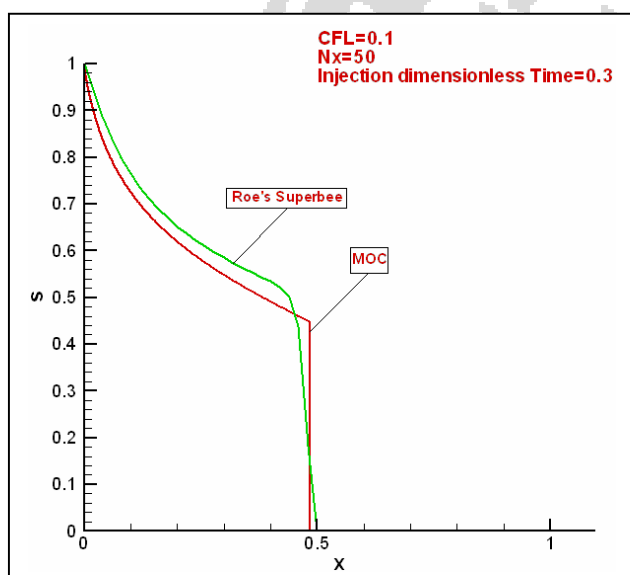
همانطوری که در بخش های قبل اشاره شد، در این مقاله از هفت روش مختلف عددی جهت حل معادله Buckley-Leverett استفاده شده است و جواب های حاصل از این هفت روش با جواب های بدست آمده از روش مشخصه ها [8] (MOC) مقایسه شده اند. روش های استفاده شده عبارتند از فلاکس محدود کننده [3] Roe's Superbee، فلاکس محدود کننده [3] Vanleer، فلاکس محدود کننده [4] Vanalbada، فلاکس محدود کننده [4] Minmod، روش مرتبه اول Lax- [5] Friedrich، روش مرتبه اول [6] Upwind و روش مرتبه دوم [7] Lax-Wendroff. در ادامه نتایج بدست آمده ارایه می گردد.



شکل ۲- روش فلاکس محدود کننده

Buckley-Leverett جهت حل معادله

Vanleer جهت حل معادله Buckley-Leverett

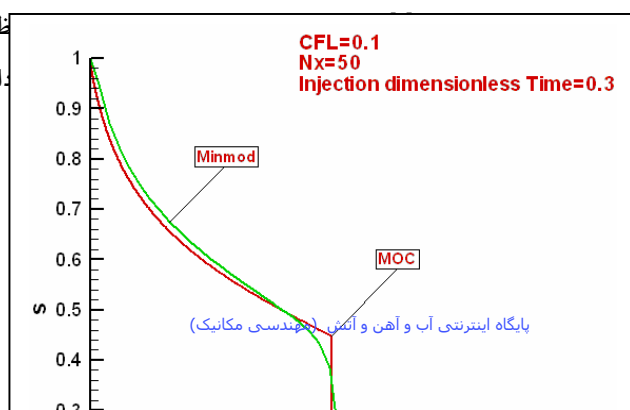


شکل ۳- روش فلاکس محدود کننده

Buckley-Leverett جهت حل معادله Vanalbada

کننده Roe's Superbee جهت حل معادله Buckley-Leverett

با آنالیز شکل ۱ در می یابیم که خطای عددی روش [5] Lax-Friedrich نسبت به روش مرتبه اول [6] Upwind جهت حل ظاهر می رفت، روش مرتبه دوم [7] Lax-Wendroff نسبت به دارد، اما در نزدیکی شوک و نقطه ناپیوستگی جواب های درست و

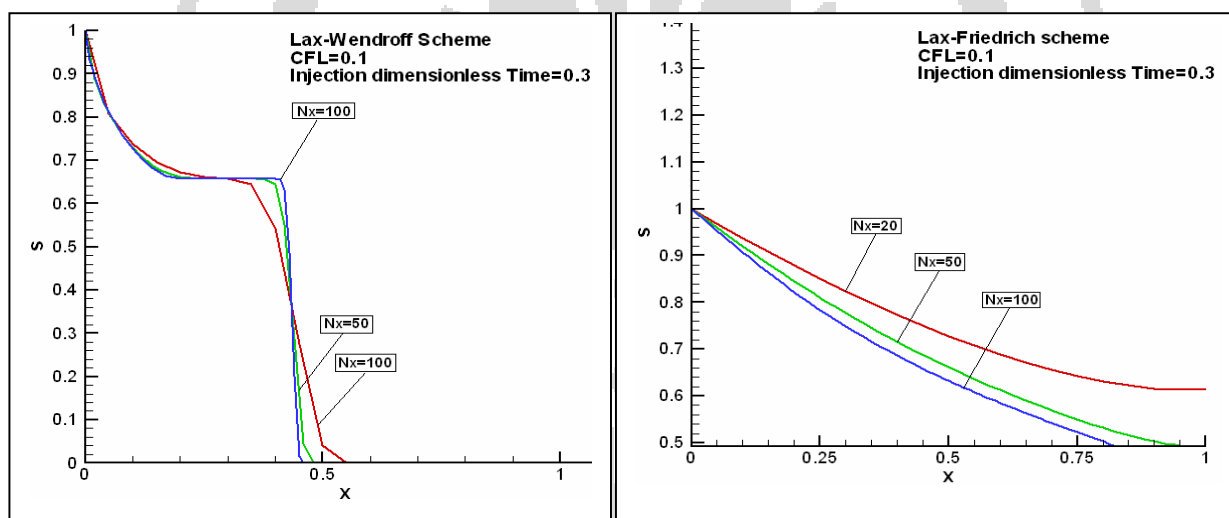


دقیقی جهت محاسبه درصد حجمی ارایه نمی دهد. در شکل های ۵،۴،۳،۲ معادله Buckley-Leverett با استفاده از فلاکس های محدود کننده مختلف حل شده است.

با توجه به نمودار های بدست آمده، چنانچه جهت حل معادله هذلولوی Buckley-Leverett از روش فلاکس محدود کننده استفاده نماییم، می توان درصد حجمی نقاط مختلف و محل شوک را با دقت بیشتری محاسبه نماییم .
شکل ۵-روش فلاکس محدود کننده Minmod جهت حل معادله Buckley-Leverett

تاثیر تعداد شبکه

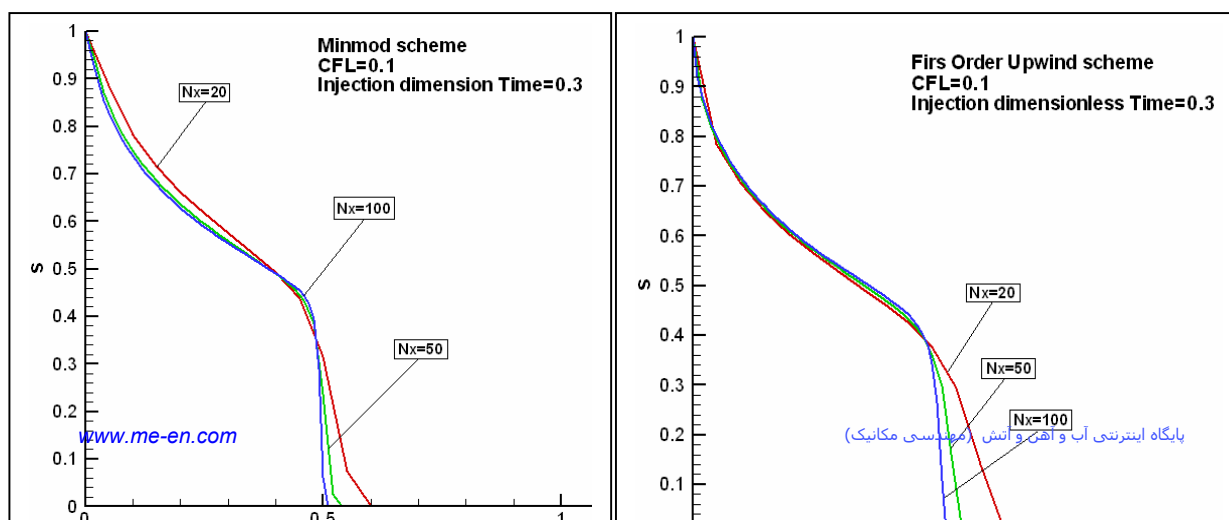
تاثیر تعداد شبکه در نمودار درصد حجمی بر حسب مکان با فرض $\text{Injection dimensionless Time}=0.3$ برای روش های عددی بکار رفته در ادامه بررسی شده است. اندازه شبکه در این مرحله به ترتیب ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ انتخاب شد در حالی که $\text{Injection dimensionless Time}$ ثابت و برابر (۰،۳) در نظر گرفته شد. هرچه تعداد شبکه بیشتر انتخاب می گردد، اندازه بلوکها (Δx) کوچکتر می شود. بدلیل آنکه خطای گسسته سازی از مرتبه Δx^2 است، بنابراین با افزایش تعداد شبکه خطاهای عددی کوچکتر می شوند.



شکل ۷- اثر تغییرات گام مکانی بر روش

شکل ۶- اثر تغییرات گام مکانی بر روش Lax-Friedrich

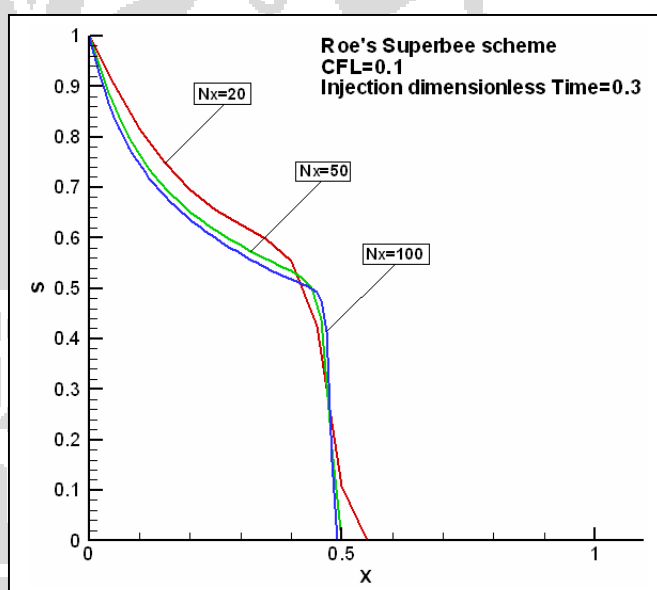
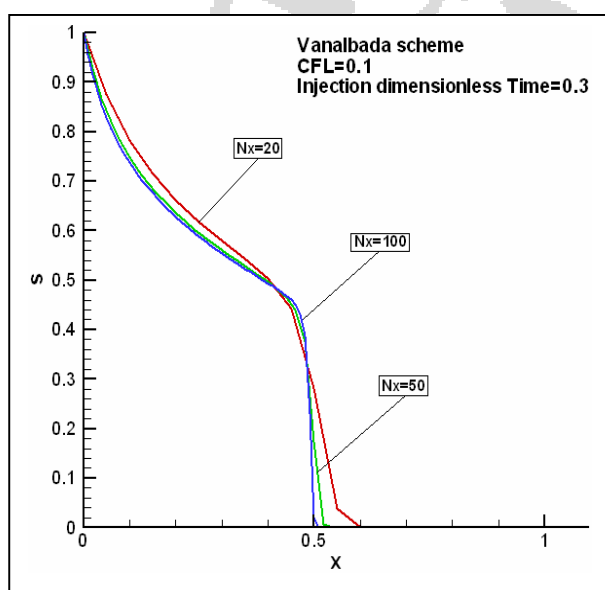
Lax-Wendroff



شکل ۹- اثر تغییرات گام مکانی بر روش فلاکس

شکل ۸- اثر تغییرات گام مکانی بر روش First Order Upwind

محدود کننده Minmod



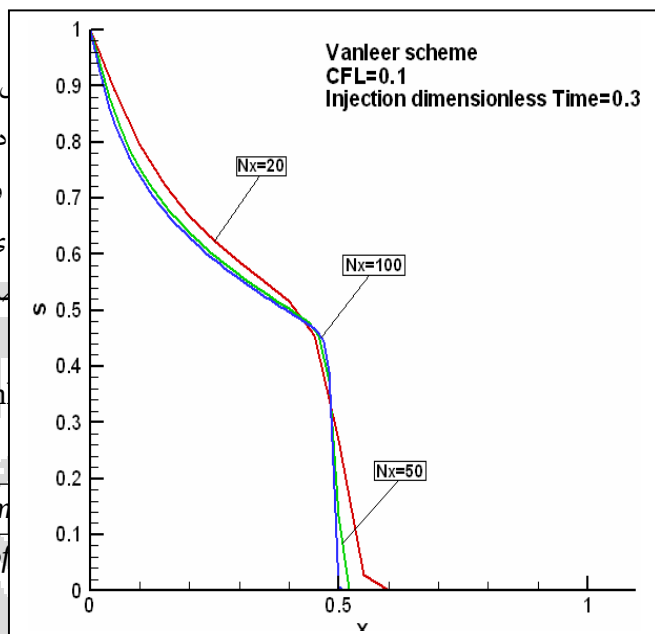
شکل ۱۱- اثر تغییرات گام مکانی بر روش

شکل ۱۰- اثر تغییرات گام مکانی بر روش فلاکس محدود کننده Roe's Superbee

فلاکس محدود کننده Vanalbeda

در زمان مختلف، حل عددی معادله Buckley-Leverett در زمان دریافت که دقت روش فلاکس محدود کننده جهت حل این و نوسانات و خطای عددی در جواب ها به مقدار قابل توجهی می باشد. در این روش بعد تزریق مختلف به طور کمی ارایه شده است. در این روش ها (MOC) [8] از معیار زیر جهت تعیین خطای هر روش

$$\text{خطای عددی هر روش} = \sqrt{\frac{\sum (S_i(\text{MOC}) - S_i(\text{Num}))^2}{N(\text{Number of})}}$$



با استفاده از معیار فوق، خطای روش های بکار گرفته شده در این مقاله عبارتند از:

نام هر روش	خطای هر روش
Vanleer Flux Limiter	2.79E-002
Vanalbada Flux Limiter	2.59E-002
Minmod Flux Limiter	2.91E-002
Roe's Superbee Flux Limiter	4.44E-002
First Order Upwind	5.31 E-002
Lax-Wendroff	5.198 E-002
Lax-Friedrich	0.33

جدول ۲- خطای کمی هر روش جهت حل معادله Buckley-Leverett برای $\Delta x = 2\text{cm}$ (تعداد نقاط 50) و $\text{CFL}=0.1$ و Dimensionless Time=0.1

نام هر روش	خطای هر روش
------------	-------------

Vanleer Flux Limiter	2.62E-002
Vanalbada Flux Limiter	2.92E-002
Minmod Flux Limiter	3.72E-002
Roe's Superbee Flux Limiter	4.56E-002
First Order Upwind	7.15E-002
Lax-Wendroff	0.10
Lax-Friedrich	0.43

جدول ۳- خطای کمی هر روش جهت حل معادله Buckley-Leverett برای $\Delta x = 2cm$ (تعداد نقاط 50) و $CFL=0.1$ و Dimensionless Time=0.3

خطای هر روش	نام هر روش
2.78E-002	Vanleer Flux Limiter
3.31E-002	Vanalbada Flux Limiter
4.18E-002	Minmod Flux Limiter
4.64E-002	Roe's Superbee Flux Limiter
8.04E-002	First Order Upwind
0.14	Lax-Wendroff
0.34	Lax-Friedrich

جدول ۴- خطای کمی هر روش جهت حل معادله Buckley-Leverett برای $\Delta x = 2cm$ (تعداد نقاط 50) و $CFL=0.1$ و Dimensionless Time=0.5

نتیجه گیری:

در این مقاله حل عددی معادله Buckley-Leverett توسط سه روش کلاسیک و چهار روش دقت بالا ارائه گردید. با توجه به نتایج بدست آمده در می یابیم که روش های کلاسیک مرتبه اول و دوم نمی توانند حل دقیقی برای معادله Buckley-Leverett ارائه دهند. علی رغم اینکه روش مرتبه دوم [7] Lax-Wendroff در تعیین درصد حجمی نقاط هموار و محل شوک، نسبت به روش های کلاسیک مرتبه اول از دقت بیشتری برخوردار می باشد، اما در نزدیکی شوک و نقاط ناپیوستگی جواب های قابل قبولی برای معادله Buckley-Leverett ارائه نمی دهد.

چنانچه معادله Buckley-Leverett با استفاده از روش فلاکس محدود کننده که جزء روش های دقت بالا می باشد، به طور عددی حل شود، جواب ها از دقت بسیار بیشتری نسبت به روش های کلاسیک برخوردار می باشند. همچنین از میان فلاکس های محدود

کننده مختلف که در این مقاله جهت حل معادله Buckley-Leverett از آنها استفاده شده است، جواب های بدست آمده از روش فلاکس های محدود کننده [3] Vanleer و [4] Vanalbada از دقت بیشتری نسبت به روش های دیگر در تعیین محل شوک و درصد حجمی برخوردار می باشد.

مراجع

- [1]-SE. Buckley and M.C. Leverett, Mechanisms of fluid displacement in sand, Trans. AIME, 146,107-116, 1942.
- [2]-R. Juanes and T. W. Patzek, Multiscale-Stabilized finite element methods for miscible and immiscible flow in porous media, J. of Hydraulic Research Vol. 42, pp.131-140, 2004.
- [3]- R. J. LeVeque, Numerical Methods for Conservation Laws, Birkhauser, Berlin, 1992.
- [4]- J. Hudson, Numerical Techniques for Conservation Laws with source term, M.Sc. thesis, University of Reading, 1998.
- [5]- Y. Ha, Y. J. Kim, Explicit solution of a convection-reaction equation and defects of difference schemes, J. Comput. Phys. , 2005.
- [6]- R. Ahmed, Numerical schemes Applied to the Burgers and Buckley-Leverett Equation, M.Sc. thesis, University of Reading, 2004.
- [7]-R. J. LeVeque, Finite Differences Methods for Differential Equations, <http://www.amath.washington.edu/~rjl/booksnotes.html>, Unpublished text, 1998.
- [8]- D. A. Anderson, J. C. Tannehill and R. H. Pletcher, Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Hemisphere Pub. Corporation, New York, 1984.
- [9]-D. W. Peaceman, Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation, Elsevier, New York, 1977.
- [10]-G. J. Hirasaki, Lecture notes, Rice University.
- [11]- C.B. Laney, Computational Gasdynamics, Cambridge University Press, United Kingdom, 1998.

