

«به نام خدا»



گروه دینامیک سیالات محاسباتی

دانشگاه صنعتی اصفهان

حل دستگاههای معادلات خطی با استفاده از روشهای چند شبکه‌ای

میثم جولائیان

کلیه حقوق این کتاب الکترونیک متعلق به گروه دینامیک سیالات محاسباتی دانشگاه صنعتی اصفهان می‌باشد

هر گونه چاپ، تکثیر و استفاده از آن با ذکر منبع بلا مانع است.

<http://CFD.iut.ac.ir>



مقدمه

در حل مسائل عددی گاهی با مسایلی روبرو میشویم که حل آنها منجر به حل یک دستگاه معادلات میگردد. برای حل دستگاههای معادلات روشهای متفاوتی وجود دارد که از آن جمله میتوان به روشهایی مانند روش ژاکوبی^۱، روش گوس-سایدل^۲ و روش SOR را اشاره کرد. همگرایی روشهای ژاکوبی و GS بسیار کند میباشد. دلیل کند بودن همگرایی اینگونه روشها، عدم توانایی آنها در حذف فرکانسهای پایین تابع خطا میباشد. به عبارت دیگر سرعت انتشار اطلاعات در اینگونه روشها بسیار پایین میباشد. معمولاً به اینگونه روشها، روشهای یکنواکننده^۳ نیز گفته میشود. برای جبران این مشکل معمولاً از روشهای چند شبکههای^۴ استفاده میشود.

روشهای چند شبکهای

روش MG

همانطور که قبلاً اشاره شد، حذف فرکانسهای پایین تابع خطا که براحتی با روشهای معمولی GS حذف نمی-شوند، ایده‌ی اصلی روشهای MG میباشد. برای این منظور از شبکه با سایزهای متفاوت استفاده میشود. به عبارت دیگر با انتقال جواب به شبکههای خشنتر فرکانسهای پایین برای شبکه‌ی ظریف تبدیل به فرکانسهای بالا برای شبکه‌ی خشن گشته و با تعداد کمتری تکرار حذف میشوند. روش MG پیچیدگی خاصی از لحاظ ریاضی ندارند و تنها سختی کار، برنامه نویسی ویژهای است که در این روش نیاز میباشد. برای توضیح بیشتر مسالهی انتقال حرارتی زیر توسط این روش حل می گردد:

¹Jacobi

²Gauss-Seidel(GS)

³Smoother

⁴MultiGrid(MG)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1} = 0$$

$$T(0, y) = 0$$



$$T(1, y) = y$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

شکل 1-Error! No text of specified style in document. ناحیه ی حل و شرایط مرزی

معادله حاکم بر این مساله، معادله لاپلاس میباشد که فرم گسسته شده ی آن به صورت زیر میباشد.

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \quad \text{Error! No text of specified style in document.}$$

(1-in document.)

این روش دارای خطای برشی⁵ $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$ می باشد. همچنین معادله ی اصلاح شده ی این روش به فرم زیر می باشد [1]:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = \frac{-1}{12} [\phi_{xxxx} \Delta x^2 + \phi_{yyyy} \Delta y^2] + \dots \quad \text{Error! No text of specified style in document.}$$

(2-document.)

معادله ی (1-Error! No text of specified style in document.) یک معادله ی FDE خطی میباشد. در صورت استفاده از یکی از روشهای یکنوا کننده مانند روش GS میتوان نوشت:

⁵Truncation Error

$$\phi_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2[1+\beta^2]} \left[\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \beta^2 (\phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j-1}^{n+1}) \right]$$

Error! No text of specified style in)
(3-document.

اگر اپراتور L به صورت $L(\phi) = 0$ تعریف شود و همچنین یک جواب میانی باشد آنگاه میتوان نوشت :

$$L(\phi_{ij}^k + \Delta\phi_{ij}) = 0$$

Error! No text of specified style in)
(4-document.

که به توجه به خطی بودن مساله داریم:

$$L(\phi_{ij}^k) + L(\Delta\phi_{ij}) = 0 \rightarrow -L(\Delta\phi_{ij}) = R_{ij}^k$$

Error! No text of specified style in)
(5-document.

بنابراین به جای حل معادله‌ی (3-Error! No text of specified style in document.) میتوان معادله -

ی (5-Error! No text of specified style in document.) را حل نمود. برای این کار کافی است که

باقیمانده را پس از سه یا چهار تکرار بر روی شبکه‌ی اولیه محاسبه نماییم و سپس آن را به شبکه‌ی خشنتر

انتقال دهیم و سپس معادله‌ی (5-Error! No text of specified style in document.) را با شرایط اولیه‌ی

$\Delta = 0$ حل نماییم. برای انتقال باقیمانده به شبکه‌ی خشن میتوان از اپراتور تزریق^۶ استفاده نمود. برای این

منظور باید از زیربرنامهی^۷ زیر استفاده نمود:

^۶Injection

^۷Subroutine

```

AA=1
BB=JJ-1
DO    I=1,MM2
      RR2(I)=RR1(AA*II+2*I-1)
      IF (I=BB)    THEN
          AA=AA+1
          BB=BB+JJ-1
      END IF
END DO

```

که در آن JJ تعداد سطرها (ستونها) بر روی شبکه‌ی ریز و II تعداد سطرها (ستونها) بر روی شبکه‌ی درشت می‌باشد. MM2 نیز برابر است با $(II-1)^2$. همچنین RR2 نشان‌دهنده‌ی باقیمانده‌ی بر روی شبکه‌ی درشت و RR1 نشان‌دهنده‌ی باقیمانده‌ی بر روی شبکه‌ی ریز می‌باشد. ناگفته نماند که در اینجا برای افزایش سرعت برنامه باقیمانده به صورت بردار محاسبه شده‌است (نه به صورت ماتریس).

حال باقیمانده‌ی معادله‌ی (5-Error! No text of specified style in document.) را پس از چند تکرار محاسبه کرده و به شبکه‌ی خشنتر (شبکه‌ی سوم) منتقل می‌کنیم. این کار را میتوان تا رسیدن به خشنترین شبکه (شبکه‌های با یک نقطه‌ی میانی) ادامه داد. البته معمولاً از سه یا چهار شبکه بیشتر استفاده نمی‌شود.

اکنون بر روی خشنترین شبکه دستگاه تا همگرایی کامل حل می‌گردد. برای این کار از دستور زیر استفاده می‌گردد:

سابروتین GS، سابروتینی است که ضرایب مورد نیاز معادله‌ی (5-document) را میگیرد و مقادیر Δ و باقیمانده را پس از یک تکرار میدهد. سپس برای بررسی همگرایی از شرط $\|R\| < 10^{-5} \|R_0\|$ استفاده شده است، که R_0 مقدار باقیمانده‌ی اول در ظرفیت‌ترین شبکه و $\| \cdot \|$ نشان دهنده‌ی نرم مرتبه دو میباشد. سابروتین GS نیز به صورت زیر میباشد:

```

M=1
DO J=2,JJ
DO I=2,II
DD(I,J)=(1/(2*(1+BE)))*(DD(I+1,J)+DD(I-1,J)
+BE*(DD(I,J-1)+DD(I,J+1)))+RR1(M)/(2*(1+BE))
M=M+1
END DO
END DO

```

که در این قسمت مقدار D4 محاسبه گشته و در ادامه داریم:

```
DO      I=2,II
      DD(I,1)=DD(I,2)
      DD(I,JJ+1)=DD(I,JJ)
END DO
```



در این قسمت نیز شرط عایق بودن در بالا و پایین ناحیهی حل اعمال میگردد. ناگفته نماند که برای اعمال شرط مرزی نیومن از تقریب مرتبه یک استفاده شدهاست. برای این منظور میتوان از تقریبهای مرتبه بالاتر و یا روشهایی مانند روش مرز مجازی استفاده نمود. در انتهای این سابروتین نیز مقدار باقیمانده در تکتک گرهها محاسبه میگردد.

```
M=1
DO J=2,II
DO I=2,JJ
RR2(M)=-DD(I,J)*(2*(1+BE))
+(DD(I+1,J)+DD(I-1,J)+BE*(DD(I,J-1)+DD(I,J+1)))+RR1(M)
M=M+1
END DO
END DO
```

حال باید مقدار تصحیحات به دست آمده را از شبکههای خشن به شبکههای ریز منتقل نمود. برای این منظور میتوان از میانبایی دوخطی^۸ استفاده نمود. به این عمل تمديد کردن^۹ گفته میشود. برای این منظور نیز از سابروتین زیر استفاده میشود:

```
DD2=0
DO J=1,II+1
DO I=1,II+1
DD2(2*I-1,2*J-1)=DD1(I,J)
END DO
END DO
```

که در این قسمت نقاطی از شبکه که منطبق بر یکدیگر میباشند، توسط اپراتور تزریق مقداردهی میشوند. در قسمت بعد جواب به صورت سطری میانبایی میگردد:

^۸Bilinear

^۹Prolongation

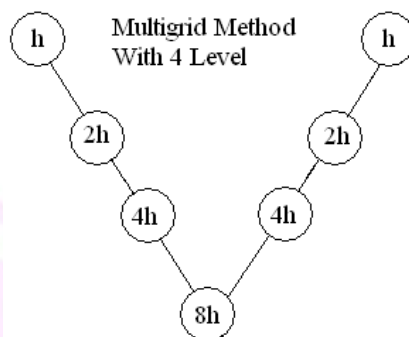


```
DO J=1, JJ+1, 2
  DO I=2, JJ, 2
    DD2(I,J)=0.5*(DD2(I+1,J)+DD2(I-1,J))
  END DO
END DO
```

و در نهایت توسط میانبایی ستونی تمامی گرههای شبکه‌ی ریز مقدار دهی میشوند.

```
DO I=1, JJ+1
  DO J=2, JJ, 2
    DD2(I,J)=0.5*(DD2(I,J+1)+DD2(I,J-1))
  END DO
END DO
```

حال مقدار تصحیح به‌دست آمده با جواب در مرحله‌ی رفت جمع شده و بعد از چند تکرار و نو شدن^{۱۰} شبکه‌ی ریزتر منتقل میگردد. در نهایت بر روی ریزترین شبکه نیز با جواب جدید چند تکرار انجام میگردد که در صورت همگرایی از برنامه خارج میشود و در غیر این صورت یک سیکل MG دیگر شروع میگردد. اگر شبکه با چهار سطح در نظر گرفته شود، شکل شماتیک سیکل MG را به صورت زیر میتوان نشان داد:

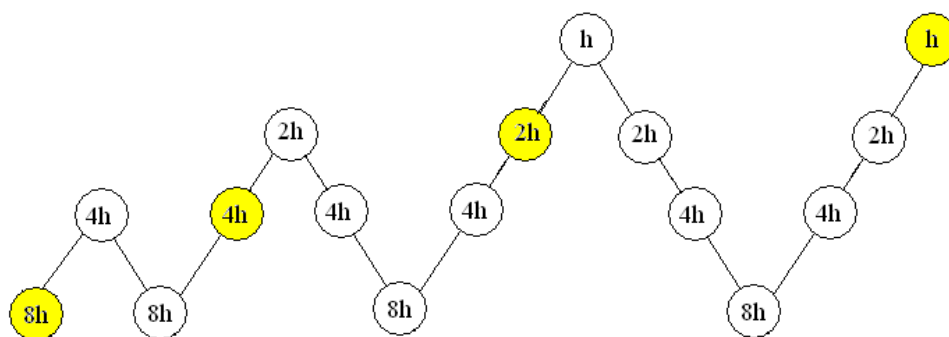


شکل 2-Error! No text of specified style in document. شماتیک روش چند شبکه‌های MG با چهار سطح

¹⁰Update

روش FMG¹¹

- برای حل مسائل غیرخطی روش کار دقیقاً مانند بالا نمیباشد. در این حالت به صورت عکس عمل میکنند. به عبارت دیگر از شبکه‌ی خشن شروع کرده و به سمت شبکه ریز حرکت میشود. برای این کار معادله را بر روی خشنترین شبکه به صورت کامل همگرا میکنند. سپس جواب به دست آمده را به شبکه‌ی ظریفتر انتقال می دهند. در این مرحله برای رسیدن به همگرایی کامل از روش MG استفاده میکنند. پس از رسیدن به همگرایی کامل جواب را به یک شبکه‌ی ریزتر منتقل میشود. این فرایند تا رسیدن به ریزترین شبکه و همگرایی کامل بر روی آن ادامه مییابد.
- از روش FMG برای مسائل خطی نیز میتوان استفاده نمود. اگر شبکه با چهار سطح در نظر گرفته شود، شکل شماتیک سیکل FMG را به صورت زیر میتوان نشان داد. مقادیر هاشور خورده نشان از همگرایی کامل دارند :



شکل 3-Error! No text of specified style in document. شماتیک روش چند شبکه‌های FMG با چهار سطح

¹¹Full MultiGrid

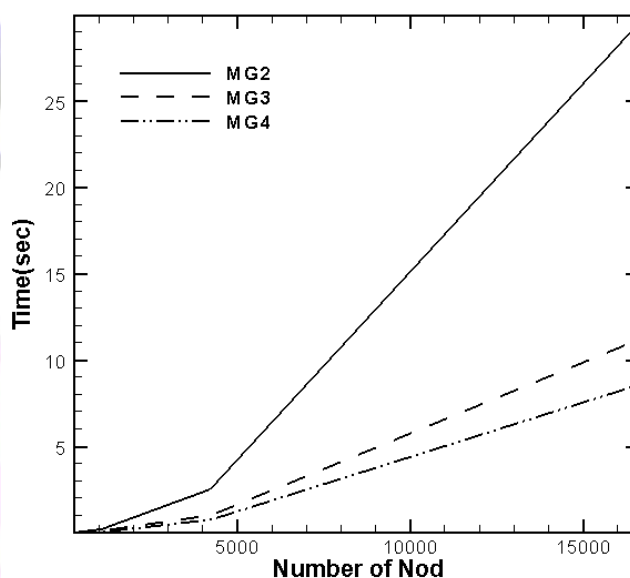
بررسی نتایج

برای اینکه بتوان روشهای MG و FMG را مورد بررسی قرار داد حالتیهای زیر در نظر گرفته میشود:

1. تاثیر تغییر تعداد سطوح در روش MG
2. تاثیر تغییر تعداد سطوح در روش FMG
3. بررسی سرعت همگرایی روشهای چند شبکههای و روشهای معمولی
4. مقایسه تغییرات باقیمانده در روش MG و روشهای معمولی

تاثیر تغییر تعداد سطوح در روش MG

برای بررسی این پارامتر در روش MG از سه سیکل MG دو، سه و چهار مرحلهای استفاده شده است.



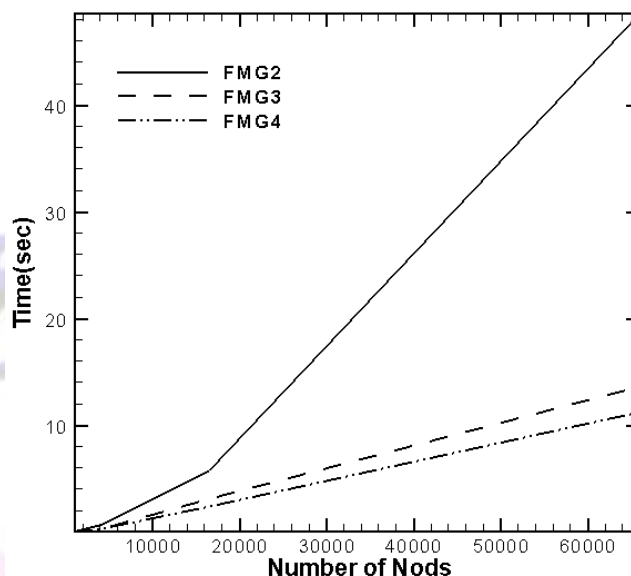
شکل 4- زمان طی شده تا رسیدن به همگرایی کامل در روش MG

همانطور که قبلاً اشاره شد افزایش سطوح در روش MG باعث نزدیک شدن شبکه به حالت تک نقطه‌ای میشود. در نتیجه هر چه تعداد سطوح زیادتر گردد، فرکانسهای پایین خطا سریعتر حذف میگردند. شکل

4-Error! No text of specified style in document. نیز گویای همین مطلب میباشد. همانطور که مشخص است برای یک شبکه با سایز دلخواه، روش MG چهار سطحی سریعترین جواب و MG دو سطحی دیرترین جواب را میدهد. از طرفی از شکل 4-Error! No text of specified style in document. میتوان نتیجه گرفت که هرچه تعداد نقاط شبکه زیادتیر شود، زمان محاسبات افزایش مییابد. این افزایش تقریباً به صورت نمائی میباشد.

تأثیر تغییر تعداد سطوح در روش FMG

برای بررسی این پارامتر در روش FMG از سه سیکل FMG دو، سه و چهار مرحلهای استفاده شدهاست.



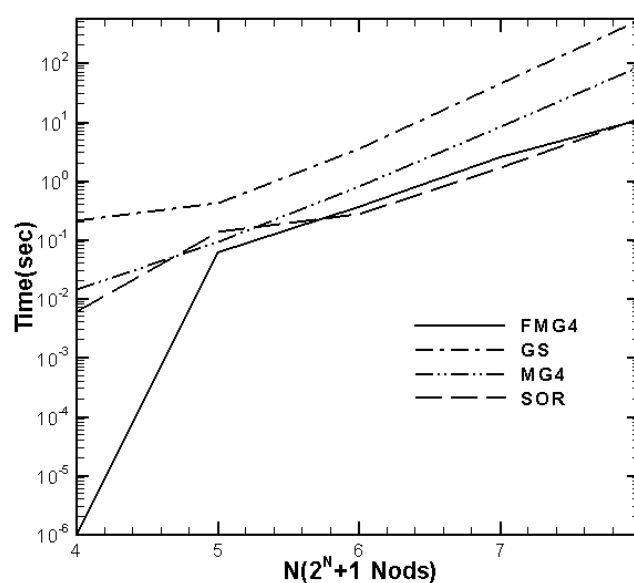
شکل 5-Error! No text of specified style in document. زمان طی شده تا رسیدن به همگرایی کامل در روش

FMG

- همانطور که انتظار میرفت در روش FMG نیز افزایش سطوح باعث افزایش سرعت همگرایی می گردد(شکل 5-Error! No text of specified style in document). همچنین با توجه به شکل میتوان دریافت که افزایش سطوح بیشتر از چهار سطح، هرچند که باعث افزایش سرعت همگرایی میگردد ولی این میزان افزایش کم میباشد. پس میتوان گفت که افزایش بیش از چهار سطح کار مناسبی نمیباشد.

سرعت همگرایی

در این قسمت به مقایسه سرعت همگرایی چهار روش GS، SOR، MG، چهار سطحی و FMG چهار سطحی پرداخته میشود. برای روش SOR مقدار بهینه ضریب فوق تخفیف^{۱۲} استفاده شده است. شکل Error! No text of specified style in document. 6-text of specified style in document. این مقایسه را نشان میدهد.



شکل Error! No text of specified style in document. 6: مقایسه سرعت همگرایی روشهای چند شبکه‌ای و روشهای معمولی تکرار

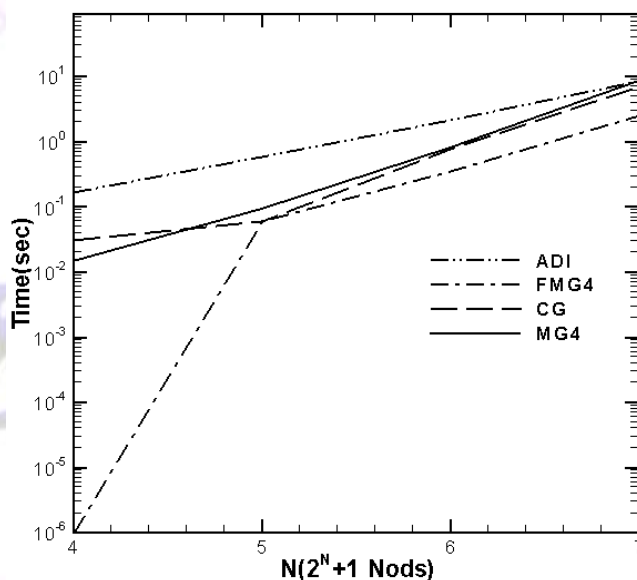
همانطور که مشخص است طولانیترین زمان و یا به عبارت دیگر کمترین نرخ همگرایی مربوط به روش GS میباشد که دلیل آن قبلاً ذکر شد. با استفاده از روش MG سرعت همگرایی بهبود مییابد ولی به حالت بهینه نمیرسد. ولی همانطور که مشخص است رقابت تنگاتنگی میان روش SOR و FMG وجود دارد. در این حالت چون معادله‌ی حاکم^{۱۳} بر مساله، معادله‌ی لاپلاس میباشد، دستگاه حاصل از گسسته‌سازی شرط تسلط قطری را خودبخود دارد. از طرف دیگر مقدار بهینه ضریب فوق تخفیف برای معادله‌ی لاپلاس موجود میباشد. این عوامل باعث میشوند که روش SOR در این مساله به خوبی عمل نماید.

¹²Over Relaxation

¹³Governing Equation



در حالت کلی که امکان دارد مقدار بهینه‌ی فوق تخفیف برای روش SOR موجود نباشد، مطمئناً روش FMG به عنوان یکی از کارآمدترین روشها میباشد. به عنوان مثال همانطور که در شکل Error! No text of specified style in document. نشان داده شده است، سرعت همگرایی روش FMG نسبت به روشهایی مانند روش ADI و روش گرادیان مزدوج نیز بالاتر میباشد. البته اگر از ماتریسهای پیش شرط کننده‌ی مناسب برای روش CG استفاده شود، روش CG نیز میتواند یکی از روشهای مفید در حل دستگاه باشد. البته لازم به ذکر است که روش FMG دارای هیچگونه محدودیتی نمیباشد، در صورتی که در روش CG ماتریس ضرایب دستگاه باید مثبت معین باشد.

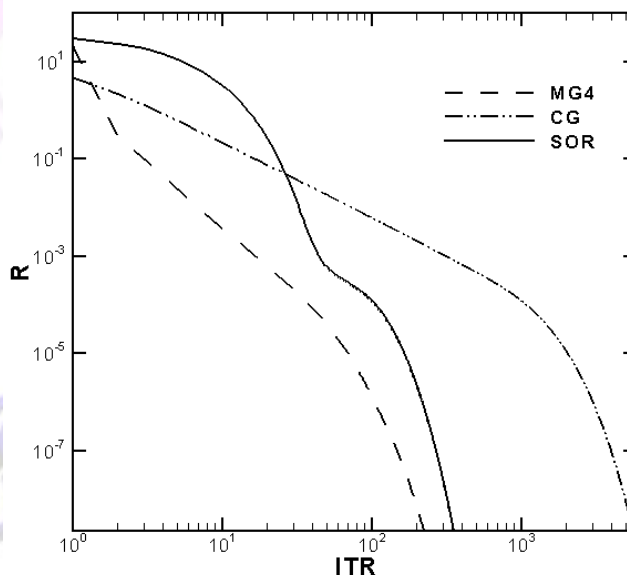


شکل Error! No text of specified style in document.: مقایسه‌ی سرعت همگرایی روشهای چند شبکه‌ای و روشهای ADI و CG

در کل ویژگیهای منحصر به فرد روشهای چند شبکه‌ای، این روشها را به عنوان یکی از پر کاربردترین روشهای حل دستگاه تبدیل کرده است.

نرخ تغییر باقیمانده

یکی دیگر از پارامترهای مورد بررسی، نحوه‌ی میل کردن باقیمانده به سمت صفر می‌باشد. همانگونه که از شکل 8-Error! No text of specified style in document. مشخص است، سریعترین نرخ همگرایی مربوط به روش SOR می‌باشد. در این روش باقیمانده با شیب زیاد به سمت صفر میل کرده و در نهایت با سرعت بیشتری همگرا می‌گردد. در حالیکه شیب باقیمانده در روش CG کم است و نرخ همگرایی پایین.



شکل 8-Error! No text of specified style in document. نحوه‌ی میل کردن باقیمانده به سمت صفر

مراجع

- [1] J. C. Tannehill, D. A. Anderson & R. H. Plether, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer" 2nd edition, Taylor & Francis Ltd, 1997