

ارتعاشات مکانیکی - استاد حبیب ملوی - نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۱-۹۰

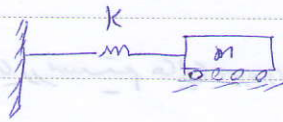
جلسه اول : 3، 12، 90 : چهارشنبه

نوسان (ارتعاش) : حرکت های تکرار شونده را نوسان یا ارتعاش گویند. ویژگی آن تکرار در مدت زمانی مشخص ثابت است. و نوسانی را مورد بررسی قرار می دهیم که عوامل مکانیکی در آن دخیل باشند که در این صورت نوسانات یا ارتعاشات مکانیکی گوئیم.

نوسان مکانیکی : اگر در یک پدیده نوسانی با مقادیر مکانیکی از جابجایی، سرعت، شتاب، نیرو، گشتاور و ... تکرار شوند نوسان را مکانیکی می نامیم.

آیا هر سیستم مکانیکی قابلیت ارتعاش پیدا کردن را دارد؟ اگر بله باید چه قابلیت های داشته باشد؟
فقط و فقط سیستم های دینامیکی قابلیت هر تعریف شدن دارند.

سیستم دینامیکی : سیستمی که قابلیت دریافت انرژی یا تسخیر و تبدیل آن به انرژی جنبشی را داشته باشد را سیستم دینامیکی گویند. مثل سیستم روبرو:



بر این سیستم می توان انرژی یا تسخیر داد و گاه فرستاده جرم را به سمت صلب یا راست حرکت دهیم و تغییر طول برای قترایا بگیریم.

تکرار این صورت قتر در این انرژی یا تسخیر می شود و در صورت رها کردن جرم انرژی یا تسخیر در صورت عدم وجود اصطکاک در قتر ذخیره می شود و چون انرژی قتر یا تسخیر است تا ابد این انرژی را در خود نگه می دارد ولی چون اصطکاک داریم بعد از نوساناتی انرژی به صفر می رسد.

اما باید قتر وجود داشته باشد که بتوانیم یک سیستم دینامیکی داریم. بلکه قابلیت الاستیکی آن مورد نظر است.

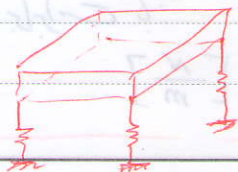


در شکل روبرو با کوچکترین ابعاد نیرو به نوبت ارتعاش بوجود

می آید و این در حالی است که قتری در کار نیست و این در حالی

است که این سیستم هم یا تسخیر است و این خواهر

ارتعاشات سیستم مقابل را مدل کنیم بدین شکل که سیستم می کشیم:



و یا مدل اولیه برای یک اتومبیل:

این قتر می تواند جایگزین خاصیت الاستیکی لاستیک

یا قتر بندی شود.

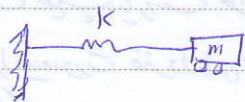
بنابراین برای حل بسیاری از مسائل باید مدل سیستم را بصورت ارتعاشاتی و مکانیکی درسیسیم کنیم.
هر سیستم مکانیکی هر چند کاملاً ساده باشد به اندازه ای کم مهم به شده ارتعاشاتی یا نوسانی دارند.
اما این نوسان در بسیاری از جاها ضرر است: زیرا اعضاء و اجزای تحت نوسان مکرر باعث خستگی در ماده می شود.
که این خستگی عموماً منجر به شکست می گردد. و یا نوسان و نوسان باعث شل شدن پیچ ها و اتصالات می شود که در
گاهی اوقات اثرات مخرب دارد. اما این نوسان در بعضی جاها مورد استفاده است مثل دریل های حفاری
کنندن آسفالت.

ارتعاشات مکانیکی: بواسطه عوامل (نیروهای) مؤثر در پدیده نوسانی بطور کلی به سه دسته تقسیم می شوند:



۱) نیروهای بازگشت دهنده: در این مورد سازه بدین نیروی وزن است که باعث می شود نوسان برگردد. بنابراین نیروی وزن در بسیاری از سیستم ها عامل مهم برگشت دهنده خواهد بود.

و یا در سیستم هایی نیروی فنری یا خاصیت فنری یا الاستیکی عامل برگشت دهنده خواهد بود:

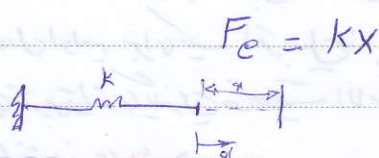


و یا در سیستم هایی هم نیروی وزن و هم نیروی فنری عامل برگشت دهنده خواهند بود:



و اگر این نیروهای برگشت دهنده وجود نداشته باشند سیستم دیگر نوسان نمی کند.

تعریف نیروهای بازگشت دهنده: نیروهایی که سعی در برگرداندن یک سیستم (مکانیکی) از محل تعادل خارج شده به حالت تعادل را دارند نیروهای بازگشت دهنده نامیده می شوند. مثل نیروهای الاستیکی (نیروی فنری) و نیروی کشش.



نیروی فنری یا نیروی الاستیکی برابر است با:
 $F_c = Kx$
که K (ریاستیون) $K = \left[\frac{N}{m} \right]$

از آنجایی که در سیستم های قبلی انرژی گراش و گشتابی در خلع هستند و چون یا باید در حین انرژی
آنها نه کم می شود و نه زیاد می شود و بی چون نیروی اصطکاک در سیستم وجود دارد و عاملی است
که سیستم یا یک رابحت سکون می دهد و یا در آونگ نیروی مقاوم هوا عاملی است که آونگ
بعد از مدت زمانی به حالت سکون می رسد و به همین دلیل (این نیروهای مؤثر نیروهای میرا کننده یا مستحکم
کننده گویند. بنا بر این دسته دوم از عوامل مؤثر در نوسانات را معرفی می کنیم:

2) عوامل (نیروهای) میرا کننده: نیروهای که کارشان موجب کاهش انرژی مکانیکی

سیستم می شود را نیروهای میرا کننده یا مستحکم کننده می نامند.

الان می خواهیم میراکنندگی را در سیستم روبروشان (همچون (معمولاً

سبیل این خاصیت سیستم سبیل را با یک عدد که باعث کاهش انرژی می شود

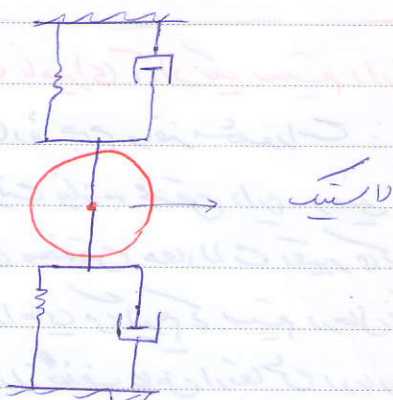


ضریب میرایی: این ضریب را با C نمایش می دهند. سبیل میراکنندگی

نیروی میراکننده زمانی وجود دارد که سریع داشته باشیم و چون نیروی مقاوم هوا بنا بر این نیروی
میراکننده عبارت خواهد بود از سرعت فنر ضریب میرایی: بنا بر این این نیرو باقی از سرعت است.

$$F_c (\text{نیروی میرایی}) = C \dot{x} \quad C \left[\frac{N \cdot s}{m} \right] = C \left[\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{s}{m} \right] = \left[\frac{kg}{s} \right]$$

و از آنجایی که در این سیستم هم خاصیت میرایی داریم و هم خاصیت الاستیسی سبیل آن بدین شکل می شود.



بعضی از سیستم‌ها وجود دارند که نیروی خارجی عاملی برای نوسان سیستم نباشد بلکه خود سیستم عامل نوسان خود است. مثل ماشین‌های سسوی که در اثر نیروی گریز از مرکز یا سها و بیلین نامیزانی جسم حول محفظه عنوان نیروی محرکه ای برای ارتعاشی بایدار خواهد شد. سیستم را به نوسان حرکت می‌کنند بنابراین دست‌سوز را هرگز نمی‌کنیم.

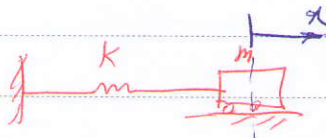
(3) عوامل (نیروهای) حرکت: این نیرو را با $F(t)$ نمایش می‌دهند که باعث زمانی نوسان را می‌شود. نیروهای که موجب حرکت سیستم می‌شوند به نوسان می‌شوند و نیروهای حرکت می‌نامیم.

اگر نیروی محرکه نداشته باشیم یعنی نوسان آزاد $F(t) = 0$
اگر نیروی محرکه داشته باشیم یعنی نوسان واداشته (امپرای) $F(t) \neq 0$

نوسان آزاد نامیزا یا بدون میرای $c = 0$
نوسان آزاد میرا یا با میرای $c \neq 0$

نوسان واداشته بدون میرای $c = 0$
نوسان واداشته با میرای $c \neq 0$

نوسانات نامیزای آزاد یک سیستم دارای یک درجه آزادی: ساده ترین مدل ارتعاشی است که به سیستم ساده جسم و فنر مشخص است.



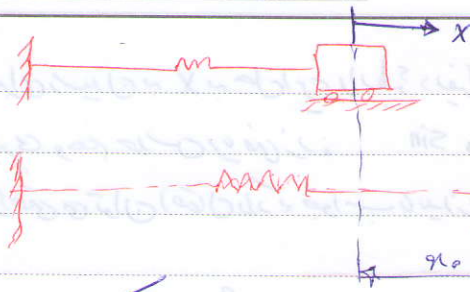
برای بررسی حرکت نیاز به مختص داریم. مختصی هم است که در صورت عوض کردن مختص معادلات تغییر می‌کنند.

مبدأ مختص را جایی می‌گیریم که سیستم در حال سکون قرار دارد. نقطه‌ای که حول آن ارتعاش انجام می‌گیرد و بعد از حذف عامل ارتعاش دوباره اون آن نقطه می‌شود پس جایز انتخاب مختص است.

(5)

Subject:

Year. Month. Date. ()



در این بحث ما مبدأ زمانی نیز مطرح می شود و این
مبدأ از زمانی است که سیستم را به حال خود رها می گذاریم
و این نقطه را به عنوان مبدأ زمانی می نامیم.

علاوه بر این حرکت

$$\begin{aligned} X(t=0) &= X_0 \\ \dot{X}(t=0) &= 0 \end{aligned} \quad \left| \quad E_0 = \frac{1}{2} k X_0^2 \right.$$

حال انرژی پتانسیل می گوییم. ما با این حرکت به سیستم
انرژی پتانسیل کسب می داریم که آن را در سیستم
به اندازه $E_0 = \frac{1}{2} k X_0^2$ و از نظر تئوریک

که از نظر انرژی فقط انرژی پتانسیل کسب می داریم.

حالت (۱)

بدون معنی است که ما ابدان انرژی را در خود نگه می داریم.

حالت دیگر: حال بدون اینکه جای شود یک ضربه می زنیم که در یک لحظه آنی جسم را از حالت
می شود و جایابی اولیه صفر است. و درست بعد از ضربه است که مبدأ زمان را انتخاب می کنیم
و در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} X(t=0) &= 0 \\ \dot{X}(t=0) &= V_0 \end{aligned} \quad \left| \quad E_0 = \frac{1}{2} m V_0^2 \right. \quad \text{حالت (۲)}$$

از نظر انرژی

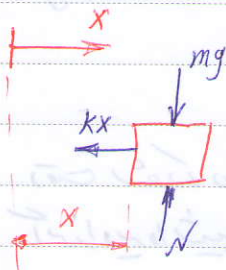
$$\begin{aligned} X(t=0) &= X_0 \\ \dot{X}(t=0) &= -V_0 \end{aligned} \quad \left| \quad E_0 = \frac{1}{2} k X_0^2 + \frac{1}{2} m V_0^2 \right. \quad \text{حالت (۳)}$$

ما بهیئت زمانی $X = ?$ $X(t) = ?$ هدف این است که ما بهیئت X نسبت به زمان را می گوییم.

بالا می گوییم و با مشتق گیری می توان سرعت و در نهایت آورد.

اولین کار ما در حرکت را می نویسیم:

نیروهای عمودی چون کار انجام نمی شود برابر می شود.



$$m \ddot{X} = -kx \quad \Rightarrow \quad m \ddot{X} + kX = 0$$

رابطه دیفرانسیلی که با حل آن به جواب می رسیدیم.

PAPCO

برای رسیدن به X به حل این رابطه دیفرانسیلی حرکت می پردازیم. اما قبل از آن می توانیم هم حسن تجربی و هم حدس برض زده $\sin$ و $\cos$ به خاطر ریاضی خاصیت تکرار شونده را معرفی می کنند. برای صحتی می توان احتمال داد که جواب باید از جنس $\sin$ و $\cos$ باشد.

$$\frac{1}{m}X(m\ddot{X} + kX = 0) \Rightarrow \ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0 \quad \ddot{X} + \omega^2 X = 0$$

$$X_1 = A_1 \sin \omega t \quad X_2 = A_2 \cos \omega t$$

جواب عمومی $\rightarrow$ به شرایط خاص حرکت
 $X(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$
 بستگی دارد که با توجه به شرایط اولیه نوشتن شود. و چون ما دو شرط اولیه داریم حتماً باید در جواب ضمیمه دو ثابت داشته باشیم تا بتوانیم هر دو شرط را در یک رابطه می سبب کنیم. بنابراین داشتن دو ثابت بیاریم است.

$$X(t=0) = X_0 \Rightarrow A_2 = X_0$$

اگر زمان رسیدن به بینم اولی است

در رسیدن به دومین است

$$\dot{X}(t) = A_1 \omega \cos \omega t + A_2 \omega \sin \omega t$$

اگر زمان ورود باشد هر دو شرط

$$\dot{X}(t=0) = A_1 \omega = V_0 \quad A_1 = \frac{V_0}{\omega}$$

مجموعه ωt باید بدون دینامیک باشد
 باید برابر ω باشد یا $\frac{1}{\omega}$ باشد

$$X(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t + X_0 \cos \omega t$$

که می توان گفت $\frac{\text{rad}}{s}$ ، فرقی
 ندارد.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{N/m}{kg}} = \sqrt{\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s}$$

دقت شود که در ارتعاشات ω را اگر سرعت زاویه ای می شناسیم. بلکه $\omega^2 = \frac{k}{m}$ می باشد.
 اگر زاویه داشته باشیم از ω و سرعت و شتاب زاویه ای را با ω و ω^2 می شناسیم.

(7)

Subject:

Year. Month. Date. ()

ما اینجا از نظر ریاضی به جواب رسیدیم ولی از نظر فیزیکی می توان گفت خاص های را می بینیم که بسیار مهم هستند و رفتار یک سیستم را که دارای حرکت نوسانی است را بررسی می کنیم.

حساب کنیم: ۹، ۱۲، ۴، غیب

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

برای معادله دیفرانسیل حرکت دو تابع به دست آوریم:

$$x_1(t) = A_1 \sin \omega t \quad x_2(t) = A_2 \cos \omega t$$

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$$

جواب عمومی

$$\text{if } x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = v_0$$

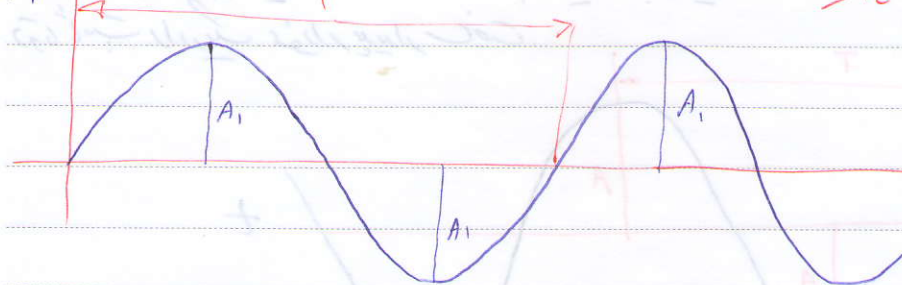
حال شرایط اولیه را لحاظ می کنیم

$$\text{then } x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t$$

جواب مخصوص با توجه به شرایط اولیه

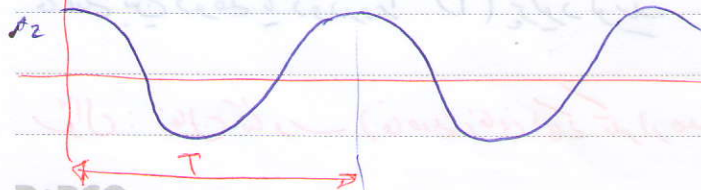
$$A_1 \sin \omega t$$

حل به رسم جواب دهی می پردازیم:



این تابع در زمان خاصی تکرار می شود که به آن زمان تناوب یا T (تواند دامنه تابع A_1 خواهد بود.

$$A_2 \cos \omega t$$



T در هر دو تابع
بهم برابر است

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad *$$

حل از A_1 بالقوسی بسیم:

$$= A_1 \left(\sin \omega t + \frac{A_2}{A_1} \cos \omega t \right) =$$

کوسین: هر عدد نامی توان بعنوان φ در نظر گرفت زیرا بردار از صفر تا ∞ است.

$$= A_1 \left(\sin \omega t + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \omega t \right) =$$

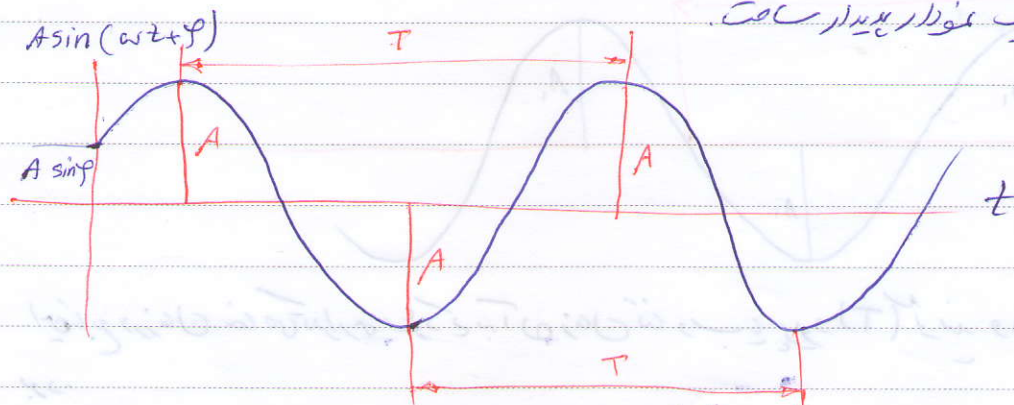
$$= \frac{A_1}{\cos \varphi} (\sin \omega t \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega t) = \frac{A_1}{\cos \varphi} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{A_2^2}{A_1^2}} = \frac{A_1^2}{A_1^2 + A_2^2} \quad \leftarrow \text{مربوط به مثلثات}$$

$$A_1^2 + A_2^2 = \left(\frac{A_1}{\cos \varphi} \right)^2$$

$$x(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad *$$

می بینیم از حالت اول به این حالت جدید رسیدیم. هم بینیم که A_1 و A_2 در رابطه اول به A و φ جایگزین شده اند. وضوی این رابطه این است که می توان آن را رسم کرد و توان آن دو ثابت را در یک نمودار پیدا گرفت.



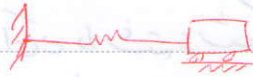
فاصله بین دو قله یا دو دره را (T) می گویند.

سوال: زمان تناوب (فاصله زمانی ای که تکرار صحنه صورت می گیرد) چقدر است؟

(9)

Subject:

Year. Month. Date. ()



زمان تناوب = زمان یک دور

تکرار یا دور تناوب

$$x(t) = x(t+T) \Rightarrow A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin[\omega(t+T) + \varphi] =$$

$$= A \sin(2\pi + \omega t + \varphi)$$

و از طرفی می توان نوشت: چون در غنچه است و بالا می آید پس می شود.

$$\omega t = 2\pi \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

این به معنای آنست که در این زمان و نسبت به می گیریم.

می بینیم که زمان تناوب مقدار ثابت است.

سوال: اگر جرم را به اندازه نصف x جای کنیم زمان چقدر خواهد بود؟ می گوئیم که همان مقدار است که اگر به اندازه x جای می کردیم. و با هر شرایط اولیه ای که برای سیستم ایجاد کنیم و به حال خودش رها کنیم باز زمان یک بار رفت و برگشت یکسان است. با توجه به این خاصیت به مفهوم جدیدی می رسیدیم.

فرکانس: می گوئیم که یک بار رفت و برگشت T ثانیه طول می کشد. در این ثانیه چقدر طول می کشد که به آن فرکانس می گوئیم.

فرکانس (بافت) (راکت نوسان)

T ثانیه

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \omega$$

یا باز f ؟ بار

فرکانس سیستم برابر است با مقدار ثابت و می توان گفت که فرکانس هیچ ربطی به شرایط سیستم که در چه حالی رها کنیم ندارد.

سوال: اگر یک سیستم جرم و فنر داشته باشیم و آن را از یک سیستم نوسانی در دست بگیریم (در صورت اگر تندی) در شرایطی که فنر از محدوده الاستیسیته خارج نشود، برای



سیستم فرکانس چه می کرد.

می گوئیم که جرم منحنی با یک فنر ثابت منحنی تحت شرایط نوسان آزاد دارای یک فرکانس است زیرا اثبات کردیم که فرکانس تغییر نمی کند مگر تحت اینست که جرم یا فنر را تغییر دهیم.

P4PCO

بنابر این با هر شرایط اولیه ای که داشت با شیم یک فرکانس داشته نداریم. ارتباط فرکانس فقط با k و m است و هیچ ربطی به x_0 و v_0 ندارد.
و اصطلاحاً می گویند برای یک جرم و یک فنریک فرکانس وجود دارد که تحت هیچ شرایطی نمی تواند این فرکانس را تغییر دهد. به این فرکانس فرکانس طبیعی گویند که با (f_n) نمایش می دهند.

فرکانس طبیعی (f_n) : برای یک سیستم جرم و فنر که نسبت به یک فرکانس وجود دارد که غیر قابل تغییر است به آن فرکانس طبیعی گویند.

$$W = \omega \quad (\text{برای یک فنر})$$

$$W = \Omega \quad (\text{برای فنر})$$

اهمیت فرکانس طبیعی : که اصطلاحاً به آن آهنگ جرم فنر گویند. اگر به سیستم یک نیروی بیرونی وارد کنیم مثل $(F(t) = F_0 \sin \Omega t)$ که می توان نوشت $(F(t) = F_0 \sin 2\pi f t)$ که در آن یک فرکانس مشخص است. حال اگر این فرکانس با فرکانس طبیعی یکی باشد دیگر دامنه نوسان ثابت نمی ماند و آنقدر بزرگ می شود که سیستم را از هم می پلاتس می کند. به این پدیده، پدیده تشدید یا رزونانس گویند.

تشدید یا رزونانس : یکی شدن فرکانس نیروی محرک با فرکانس طبیعی عاملی برای تشدید دامنه فرکانس است که در این صورت این پدیده رخ می دهد که در این صورت اعراض مخرب زیادی بر جای می گذارد.

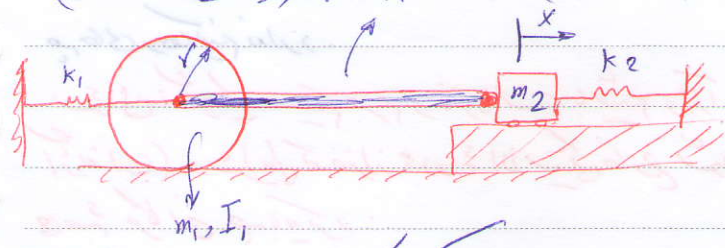
مثال : معادله دینامیک حرکت : (درجه آزادی سیستم (۱) است) جرم صلب (میله باریک بدون جرم)

(الف) به روش نیوین - اولیو

(ب) به روش انرژی

(ج) فرکانس طبیعی و زمان مناسب

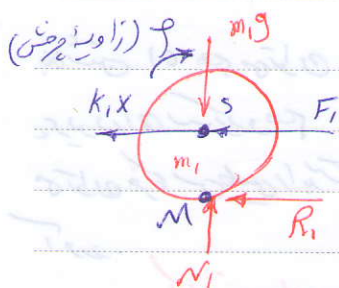
(د) روش نیوین اولیو - برای حل باید کلیه اجزا را از هم جدا کنیم که معمولاً در دروس است و معمولاً برای سیستم های با چندین درجه آزادی استفاده می کنند.



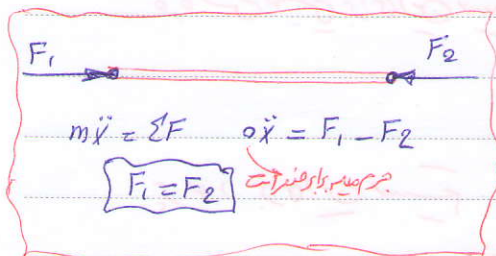
(11)

Subject:

Year: Month: Date: ()



فرض می کنیم در یک برکت راست حرکت می کند.
 R_1 و $m_1 g$ نیروهای غیرفعال هستند زیرا کار نیروها اصطفاک
 غلشی کاری برابر صفر دارد و محول نیروها غیر تاثیر گذار را
 رسم می کنیم.



دیگرام های آزاد را رسم کردیم. حال معادلات را می نویسیم:
 $m\ddot{x} = \sum F$ و $\ddot{x} = F_1 - F_2$
 $F_1 = F_2$ (بر صید بار صفر است)

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= -k_1 x - F_1 - R_1 \\ I_S \ddot{\theta} &= \sum M_S = R_1 \cdot r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} I_M \ddot{\theta} &= \sum M_m = -k_1 x \cdot r - F_1 \cdot r \end{aligned} \right.$$

بهر است از ابتدا حول مرکز آنی بنویسیم.

$$I_m = I_s + m_1 \bar{s}^2 = I_s + m_1 r^2 \quad \text{if } I_s = \frac{1}{2} m_1 r^2 \Rightarrow I_m = \frac{3}{2} m_1 r^2$$

$$\frac{3}{2} m_1 r^2 \frac{\ddot{x}}{r} = -k_1 x \cdot r - F_1 \cdot r$$

چون قرار است بر حسب x بنویسیم $\ddot{x}$ را جایگزین
 می کنیم: در حرکت غلشی $\ddot{\theta} = \ddot{x}$

$$\frac{3}{2} m_1 \ddot{x} = -k_1 x - F_1 \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x} = \sum F_{gx} \quad \left\{ m_2 \ddot{x} = F_2 - k_2 x \right\} \quad (2)$$

if (1) + (2) $\Rightarrow \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \ddot{x} + (k_1 + k_2) x = 0$

$$\left(\frac{m}{m_{eq}} \right) \ddot{x} + \left(\frac{k_{eq}}{m_{eq}} \right) x = 0$$

کار وای این میب گن کل کل آن بدین شکل است
 که در این رابطه فرکانس هست مثبت هستند
 $\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$ فرکانس زاویه ای

$$\ddot{x} + \frac{k_{eq}}{m_{eq}} x = 0 \quad \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{\frac{3}{2}m_1 + m_2}}$$

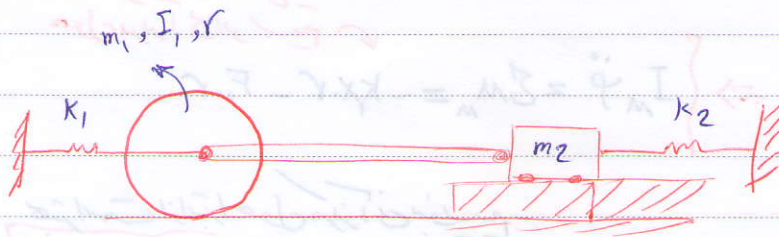
بدانستن ω هم می توان
در یورد را به سبک و هم
می توان فرکانس طبیعی را بدست
آورد.

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{\frac{3}{2}m_1 + m_2}}$$

فرکانس طبیعی برای این سیستم

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2}m_1 + m_2}{k_1 + k_2}}$$

در یورد برای این سیستم



(روش انرژی):

سیستم باید را است زیرا فقط
نیروی قدر است که کار انجام می دهد
کار اصطکاک غلظت صفر است

برای هر چیزی که جسم دارد و دارای حرکت است باید انرژی جنبشی نوشت.
هم انتقال، هم دوران به همین خاطر در ص
فقط انتقال
حرکت دوران نوشتیم؟

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} I_M \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + E_p$$

$$E_p = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x^2 \quad \frac{dE}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \dot{x} \ddot{x} + (k_1 + k_2) \dot{x} x = 0$$

چون $\dot{x}$ همواره به صفر است

$$\dot{x} \left[\left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \ddot{x} + (k_1 + k_2) x \right] = 0$$

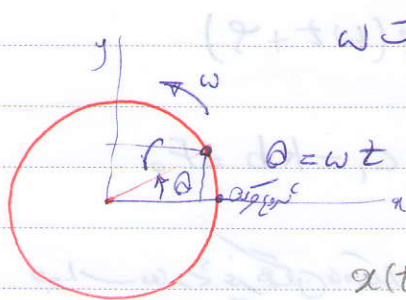
نباید برای عبارت داخل کروشه

برابر صفر است که دوباره به صفر می رسیم:

$$m_{eq} \ddot{x} + k_{eq} x = 0$$

ϕ و k از شرایط اولیه حرکت بدست می آیند و می توان از حل معادله $m\ddot{x} + kx = 0$ بدست می آیند.

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$



فرکانس زاویه ای: در حرکت دایره ای ذره با سرعت زاویه ای ثابت ω در هر لحظه برابر ωt خواهد بود. تصویر ذره در هر لحظه می نویسیم می شود.

$$x(t) = R \cos \omega t \quad \text{و} \quad R \sin \omega t = y(t)$$

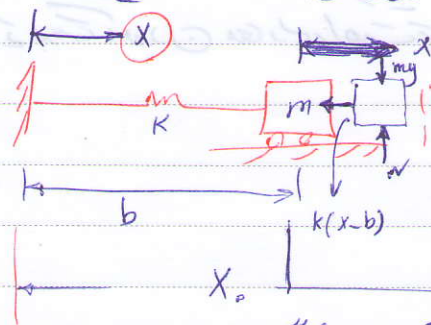
نتیجه: حرکت زاویه ای ذره حاصل از حرکت نوسانی ذره حول دایره محوری است. ω مقدار زاویه ای که در واحد زمان طی می شود و برابر است با: $\omega = \frac{\theta}{t}$ که به تغییرات زاویه ای در هر لحظه فرکانس می گفتیم. به همین خاطر فرکانس زاویه ای مطرح می شود.

$$\omega = \left[\frac{\text{rad}}{s} \right] \equiv \left[\frac{1}{s} \right] \quad \text{و} \quad f = \frac{1}{s} \quad \text{دیسایون:}$$

برای اینکه دیسایون های ω (رادیان) و f (فرکانس) یکی جهت جلوگیری از اشتباه (همانگونه که f را بصورت زیر می نویسند):

$$f = \frac{1}{s} [Hz] \quad \text{هرتز یا هر سانس}$$

نکته: انتخاب اینکه مختصات را چقدر در حرکت های فیزیکی تغییر می دهیم بستگی به این تغییر مختصات دارد. در روابط درج اولی می گذاریم.



این تغییر در محل مختصات فقط شکل معادله را تغییر می دهد.

$$x(t=0) = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = 0$$

در صورت حرکت می خواهیم یک پارامتر آزاد رسم کنیم تا معادله را بدست آوریم. شکل درج اولی را به

$$m\ddot{x} = -k(x-b) \Rightarrow m\ddot{x} + kx = kb \rightarrow F_0$$

می بینیم که معادله دیگر همون سینت و غیره همون است. حال باید دید که این غیره همون سینت و خاصیت هاست
فیزیکی تغییراتی ای رو کم می‌کنه

$$x_h(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x_{inh} = C_1 \quad \text{in steady state} \Rightarrow 0 + kC_1 = kb = F_0$$

$$C_1 = b = \frac{F_0}{k} = \frac{kb}{k} = b$$

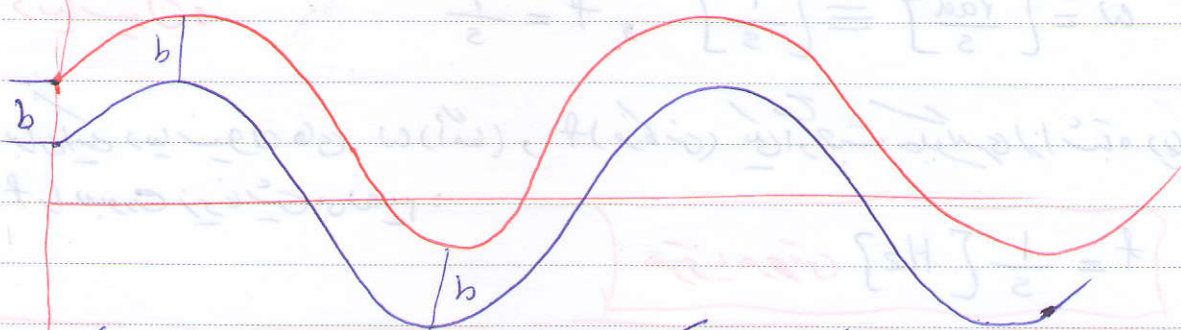
جواب معادله غیره همون با مقدار ثابت است

$$x(t) = b + A \sin(\omega t + \varphi)$$

می بینیم که تمام x های معادله قبل یک

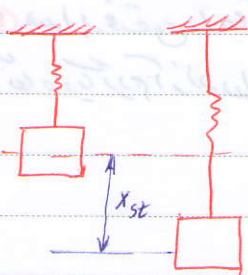
مقدار ثابت b اضافه می‌شود و دقیقاً

مقدار b اندازه b بالاتر می‌آید که تحت این شرایط نیروی بود، نه فرکانس طبیعی و نه تغییراتی



از آنجایی که شاخص‌های فیزیکی تغییراتی نه‌تنها پس جهراست حفظ را همان جایی را تغییر
که درست آوردن معادله راحت تر باشد

جلسه سوم: 17، 12، 90، چهارشنبه



نویسندگان یا ارتعاش در حقیقت قائم: در این حالت نیروی وزن فعال می‌شود.
 در این حالت (شکل موجود) از نیروی وزن ضرب سیستم پویا می‌کنیم. حال اگر سیستم
 را به حال خودی نگاه کنیم خواهیم دید که تغییر مقداری تغییر یافت خواهد داشت.
 تغییر طولی بر اثر نیروی وزن خواهیم داشت که برابر تغییر طول، تغییر طول
 استاتیکی می‌گویند: (x_{st}) چون در سیستم شکل روبرو حرکت وجود ندارد.



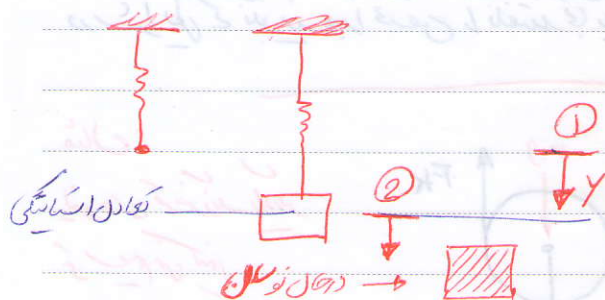
$$kx_{st} = mg$$

دیگرام آزاد در حالت استاتیکی

$$x_{st} = \frac{mg}{k}$$

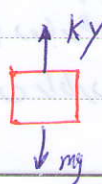
اگر فتری داشته باشیم و ندانیم که چه ثابت فتری دارد از همین روش می‌توان ابتدا (x_{st}) را به سبب
 وزن طول آزاد سیستم تم کنیم. خواهیم دید که (k) قابل محاسب است.

حال اگر کاری کنیم سیستم بالا نوسان کند (یعنی از حالت تعادل خارج کنیم). بنابراین سیستم را از حالت
 تعادل استاتیکی خارج کرده و به حال خود رها می‌کنیم:



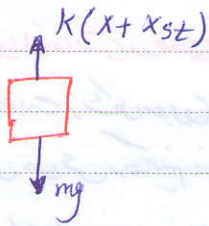
ضرر است که اگر نوسان کند دوباره در این طولی است
 یک لحظه در حالت نوسان شکل را در نظر می‌گیریم. اما
 قبل از آن باید مبدأ مختص را تعیین کنیم. البته
 بهتر است مختص را انتخاب کنیم که معادله در شرایط
 ساده‌تری داشته باشیم. اثر تغییر مختص فقط

بر روی شکل معادله بی‌تاثیر خواهد بود. برای درک مفهوم در مختص را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



① مختص را در حالت اولیه قرار می‌دهیم: از
 جایی که هر طول ثابت به اندازه y جابجایی شود: $(y = \text{جابجایی})$

معادله دینامیک غیر همگن یا ضرایب ثابت $m\ddot{y} = -ky + mg$ $\star m\ddot{y} + ky = mg$



② هدایت مختص را جایگزین کنیم که سیستم در حالت تعادل استاتیکی بود. آنگاه دیگر گرام آزاد را این حالت به شکل برقرار خواهد داشت.

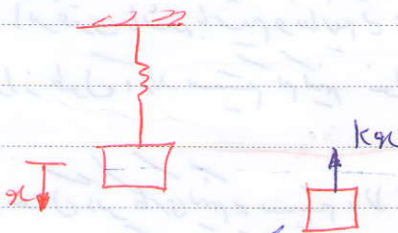
$$m\ddot{x} = -K(x + x_{st}) + mg$$

از رابطه ای برای مختص $\star = 0$

$$m\ddot{x} = -Kx - Kx_{st} + mg$$

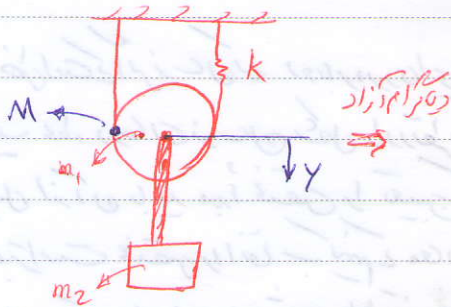
$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

نتیجه: هر سیستمی که در صفحه قائم نوسان کند دارای این شرایط خواهد بود. بدین شکل که اگر سیستم به شکل زیر داشته باشیم. اگر به نوسان در بین بدنه، برای نوشتن معادله حرکت می‌توانیم نیروی را که به سیستم اثر می‌کند تنها به این شکل خواهد بود.

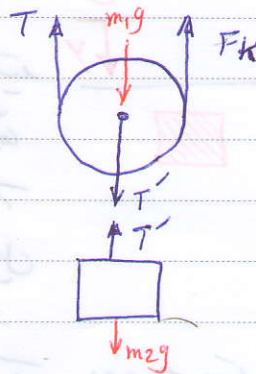


مثلاً هر می‌توانیم که دیگر گرام آزاد فقط Kx_{st} دارد بدون در نظر گرفتن نیروی وزن. باید بگوییم که نیروی وزن با Kx_{st} خنثی می‌شود که دیگر رسم نمی‌کنیم.

در شرایطی که بتوانیم هدایت مختص یا تلفیق با بدنه باید روی خط تعادل استاتیکی قرار دهیم.



گرام آزاد $\star = 0$



مثال:
نیروهای مختصزین را بدین
ترتیب رسم می‌کنیم.

حال بزرگم دوبار مختص را در جای مختلف می‌گیریم: ① هدایت y از جای شروع می‌شود که مختص را
عادی خودش را دارد. حرکت جرم را غشی در نظر می‌گیریم و مرکز آن را پیدا می‌کنیم.

(17)

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$I_m \ddot{\theta} = (\sum M)_m \quad , \quad y = r\theta : \ddot{y} = r \ddot{\theta} : I_m = \frac{3}{2} m_1 r^2$$

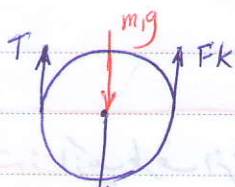
$$\frac{3}{2} m_1 r^2 \frac{\ddot{x}}{r} = (m_1 g + T') r - F_k \cdot 2r$$

$$F_k = 2ky$$

$$\frac{3}{2} m_1 \ddot{x} + 4ky = m_1 g + T' \quad (1)$$

از آنجایی که در جهت راست جرم حرکت دورانی مرکز آن است، جابجایی هم دورانی خواهد بود.

$$m_2 \ddot{y} = m_2 g - T' \quad \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \ddot{y} + 4ky = m_1 g + m_2 g$$



② برای x از تعادل استاتیکی استفاده می‌شود:

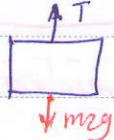
$$(\sum M)_m = 0$$

وقتی سیستم ایستاده باشد می‌توان نوشت:

$$T = m_2 g$$

$$(m_1 g + T') r - F_k \cdot 2r = 0$$

معادله تعادل می‌باشد



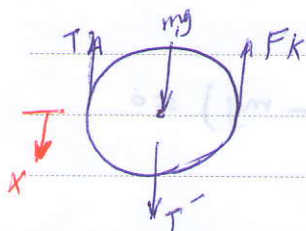
$$m_1 g + m_2 g = 4k x_{st}$$

چون تغییر شکل فنر را نمی‌دانیم

$$F_k = x_{st} \cdot k$$

x_{st} : جابجایی مرکز جرم از تعادل استاتیکی

آنگاه فاصله از تعادل $2x_{st}$ جابجایی شود



x : جابجایی مرکز جرم از تعادل استاتیکی است

$$I_m \ddot{\theta} = (\sum M)_m \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} m_1 r^2 \frac{\ddot{x}}{r} = (m_1 g + T') r - F_k \cdot 2r$$

$$2k(x_{st} + x)$$

$$\frac{3}{2} m_1 \ddot{x} = m_1 g + T' - 4k(x + x_{st})$$

P4PCO

$$m_2 \ddot{x} = m_2 g - T' \quad \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \ddot{x} = m_1 g + m_2 g - 4kx_{st} - 4kx \quad \overset{=0}{}$$

$$m_1 g + m_2 g = 4kx_{st} \quad \text{دراز طرفی را ششم:}$$

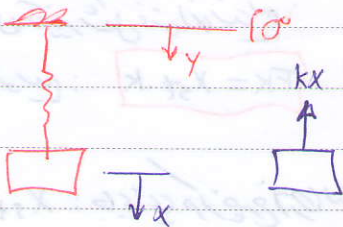
$$\left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \ddot{x} + 4kx = 0$$

برای $\Rightarrow$



نکته: از یک طرف انرژی پتانسیل کشش سیم را به حساب نمی آوریم و از آن طرف تغییر انرژی کششی حاصل از تغییر حالت تعادل استاتیکی را در نظر نمی گیریم.

حل از نقطه تغییر انرژی:



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

ی: از دهی که قدر طول آزاد فودش را دارد:

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \quad E_p = \frac{1}{2} k y^2 - mgy$$

$$\frac{dE}{dt} = m\ddot{y}\dot{y} + ky\dot{y} - mg\dot{y} = 0 \quad \dot{y}(m\ddot{y} + ky - mg) = 0$$

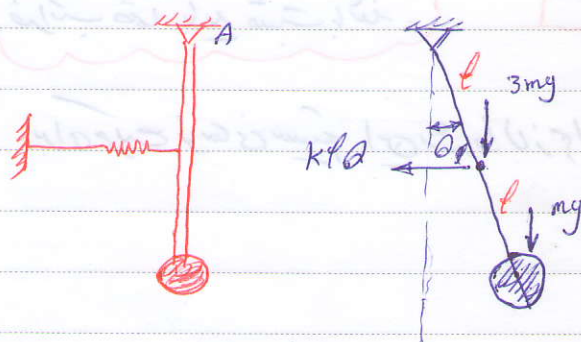
$$m\ddot{y} + ky = mg$$

x: از تعادل استاتیکی استاتیکی شود.

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad E_p = \frac{1}{2} kx^2 \quad \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

مثله ۵: مدینه یکنواخت چرخ به جرم $3M$ با طول کوچک به جرم m در انتهای نواری
کم را به انجام می دهد. برای هر حالت a, b, c تعیین کنید: (الف) معادله دینامیک
حرکت. (ب) زمان تناوب



برای تست صفر کنیم آیا سیستم در حالت تعادل
استاتیکی است یا نه. در صورتی که اگر
غیر از سیستم صرف کنیم باید در غایت و
طبیعی است که در این حالت نیروی وزن و
نیروی فنر به حالت تعادل رسیده اند.

$$I_A = m(2l)^2 + \frac{1}{3}(3m)(2l)^2 = 8ml^2$$

فاصله را تقریباً l می گیریم

$$I_A \ddot{\theta} = (\sum M)_A = -k l^2 \theta - 3mg l \sin \theta - mg 2l \sin \theta$$

$$8ml^2 \ddot{\theta} + (kl^2 + 5mg l) \theta = 0$$

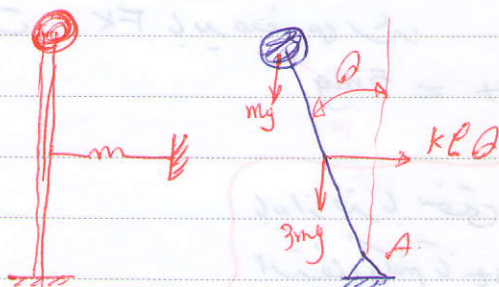
معادله دینامیک حرکت

در این معادله ضرایب همواره مثبت هستند

$$\ddot{\theta} + \frac{kl^2 + 5mg l}{8ml^2} \theta = 0 \quad \omega^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{8ml^2}{kl^2 + 5mg l}}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kl^2 + 5mg l}{8ml^2}}$$



در این حالت نیروهای وزن دیگر
نیروهای بازگشت دهنده نیستند
سیستم را به حالت قبلی بازگردانند:

$$I_A \ddot{\theta} = (\Sigma M)_A = -k\ell^2 \ddot{\theta} + mg \cdot 2\ell \sin \theta + 3mg \ell \sin \theta$$

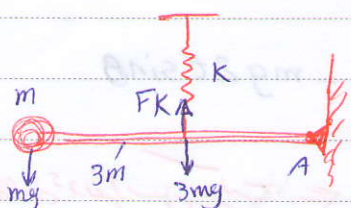
$$8m\ell^2 \ddot{\theta} + (k\ell^2 - 5mg\ell) \theta = 0$$

برای اینکه نوسان داشته باشیم
ضرایب صفاً باید مثبت باشند.

$$k\ell^2 - 5mg\ell > 0 \quad k > \frac{5mg}{\ell}$$

برای حرکت نوسانی سیستم این شرط لازم است:

$$\omega = \sqrt{\frac{k\ell^2 - 5mg\ell}{8m\ell^2}}$$



آیا سیستم در تعادل استاتیکی است؟ بله

در این تعادل شرطوطیه تغییر طول در فرکانس؟ بله

وی در سیستم های قلابی شرطوطیه تغییر طول در فرکانس

نبرد. متطویر این سیستم ها است که تشخیص آن بیاریم است.

خوبه پیدا کردن تغییر شکل قلاب. باید بگوئیم که در حالت کلی میله
به شکل افقی نیست. بلکه یک زاویه بنام (θ_{st}) داریم.

$$(\Sigma M)_A = 0 \quad -mg \cdot 2\ell - 3mg \ell + FK \ell = 0$$

از این رابطه بدین سیستم می رسیم که قلاب تغییر طول دارد. اگر تغییر طول
نداشت FK باید صفر می شد.

$$Kx_{st} = 5mg \Rightarrow x_{st} = \ell \theta_{st} = \frac{5mg}{K}$$

$$\theta_{st} = \frac{5mg}{K\ell}$$

باید از قلاب با سفتی بیشتر طول بگیریم
استفاده کنیم تا θ_{st} کاهش یابد.



دقت کنیم در کاسه با میل را در حالت افقی در نظر بگیریم

$$I_A \ddot{\theta} = (\Sigma M)_A = -Fk \cdot l = -kl\theta^2$$

$$8ml^2 \ddot{\theta} + kl^2 \theta = 0 \quad \ddot{\theta} + \frac{k}{8m} \theta = 0 \quad \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{8m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{8m}{k}}$$

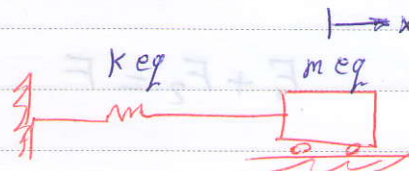
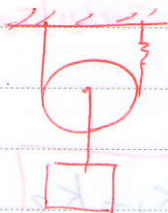
ط: باید دقت کنیم که چون
تخمین داریم سیستم
در حال تعادل است پس
این دیگر اثرات نیروی
وزن را لحاظ نکنیم.

زمانی که سیستم از یک نقطه در سیستم داشته باشیم: و توانیم شرایطی که را به یک نقطه تبدیل کرد.

هر چند سیستم در این محبت پیچیده و با شدت دارای شکل کلی معادله بدین صورت است:

$$(m_{eq}) \ddot{x} + (k_{eq}) x = 0$$

این بدین معنی است که سیستم پیچیده را به یک
سیستم ساده جسم و فنر تبدیل کردیم: مثل



$$\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right) \ddot{x} + 4Kx = 0 \quad k_{eq} = 4K, m_{eq} = \left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)$$

روش رسیدن به k_{eq} و m_{eq} بدین روش معادله ریاضی: برای اینکه از روش انرژی
استفاده می کنیم:

$$E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right) \dot{x}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2$$

انرژی جنبشی برای سیستم معادل

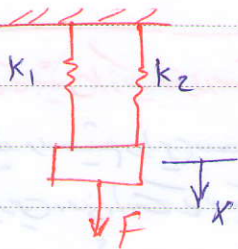
و همچنین برای انرژی پتانسیل داریم: $E_p = \frac{1}{2} k_{eq} x^2$ و $E_p = \frac{1}{2} k (2x)^2$

$$= \frac{1}{2} (4k) x^2$$

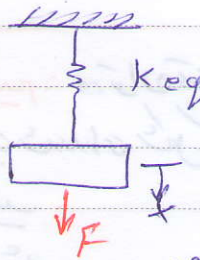
$$k_{eq} = 4k$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$$

و همچنین بدون نوشتن معادلات ریاضیاتی ω را بدست آوردیم.
روش معادل کردن: به این روش که روش انرژی است معادل جرم و معادل فنر گوئیم.



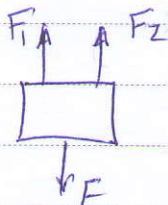
$\equiv$



معادل کردن:

اگر به هر دو سیستم نیروی F را وارد کنیم، رفتار سیستم باید برابر باشد. اگر دو فنر را در سیستم اول با یک فنر در سیستم معادل کرده باشیم.

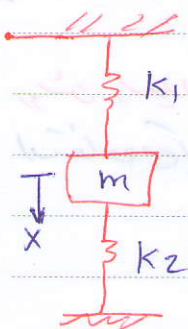
ما می توان گفت:



$$F_1 + F_2 = F$$

$$k_1 x + k_2 x = k_{eq} x$$

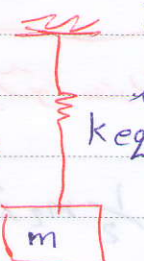
$$k_{eq} = k_1 + k_2$$



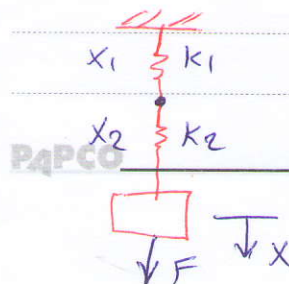
$\equiv$



$\equiv$



چون تغییر شکل فنرها به یک اندازه است درست مثل دو فنر موازی عمل می کنند.



$\equiv$



اگر فنرها بصورت متوالی یا سری باشند:

$$X = X_1 + X_2$$

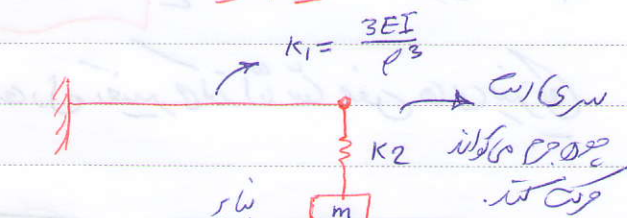
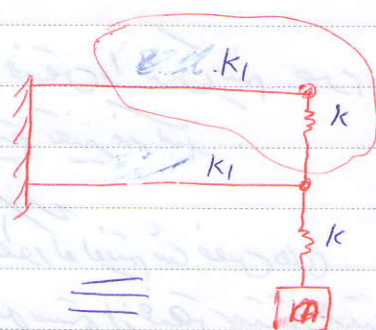
$$\frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

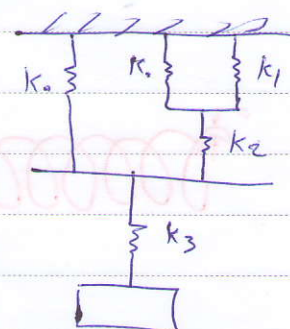
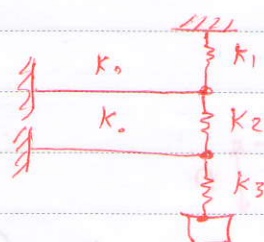
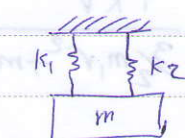
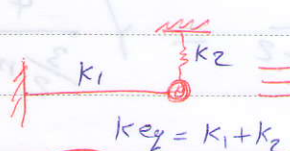
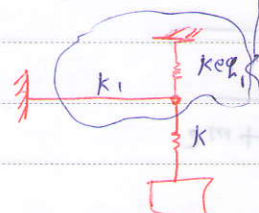
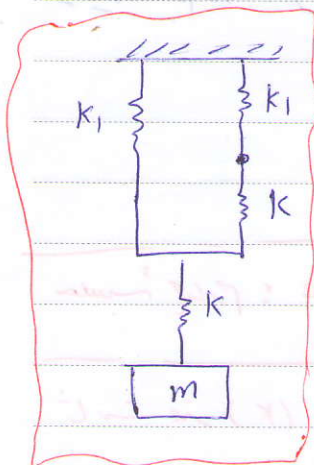
$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}$$

میزان تغییر شکل در قشرها متفاوت است ولی جمع دو تغییر در میزان X خواهد بود.

مثال: قشرها را برای سیستم زیر با بدست آورده و فرکانس زوایرا را برای آن را بیابید:

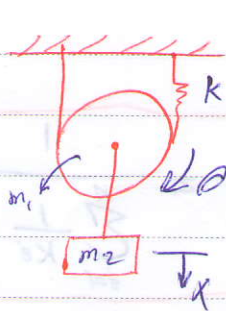


تغییر شکل در دو قشر یکسان است بنا بر این موازی هستند مثل آن ← موازی.



$$\frac{1}{k_0 + k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$k_0 + \frac{1}{\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_0 + k_1}}$$



$$E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \dot{x}^2$$

$$\dot{x}^2 = r^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} (4k) x^2$$

$$x = r\theta, \dot{x} = r\dot{\theta}$$

حل بحسب زاویه θ ، E_p و E_c را می نویسیم:

$$E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 r^2 + m_2 r^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} (4k) x^2 = \frac{1}{2} (4kr^2) \theta^2$$

m_{eq}

k_{eq}

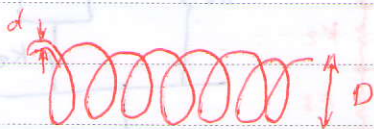
اگر فنس را عوض کنیم جرم معادل و فنس معادل تغییر می کند اما فنس های فیزیکی سیستم تغییر نمی کند.

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$$

همانطور که گفتیم فنس های فیزیکی سیستم از فنس معادل هستند.

$$= \sqrt{\frac{4kr^2}{\frac{3}{2} m_1 r^2 + m_2 r^2}} = \sqrt{\frac{4k}{\frac{3}{2} m_1 + m_2}}$$

حساب چهارم: 20, 12, 90: شب



ثابت فنر (k) به خصوصاتی بستگی دارد:

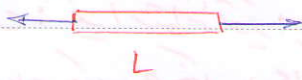
$$k = \frac{G d^4}{8 n D^3}$$

G = مدول برش (جنس مفتول)

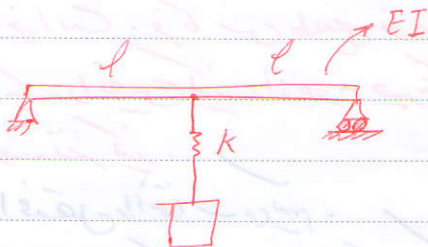
d = قطر مفتول

D = قطر فنر

n = تعداد حلقه های فنر



$$k = \frac{EA}{L}$$



$$k_1 = \frac{3EI(a+b)}{a^2b^2}$$

روش های مدل سازی:

I: مدل جامع

$$k_1 = \frac{3EI \cdot 2l}{l^4} = \frac{6EI}{l^3}$$



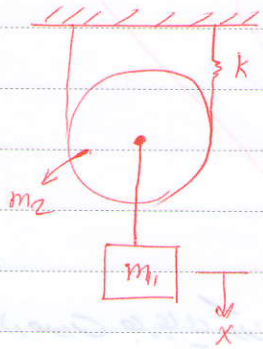
≡



$$k_{eq} = \frac{k_1 k}{k_1 + k}$$

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k}}$$

مدل سازی این سیستم بصورت سری می باشد.



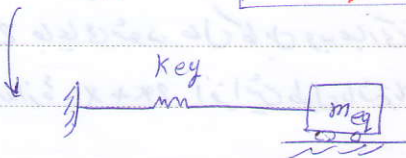
مدل سازی جرم:

$$(3/2 m_2 + m_1) \ddot{x} + 4Kx = 0$$

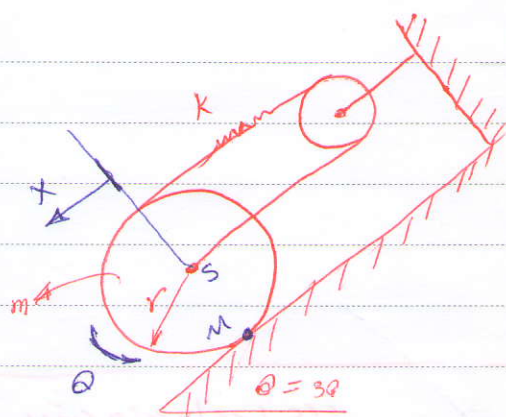
معادله دینامیکی حرکت

این رابطه ای برای این میبخت و تمام مسائل آن همان است:

$$m_{eq} \ddot{x} + k_{eq} x = 0$$



برای جرم meq و keq می توان از روش انرژی بهره برد.



فصل: یک استوانه توخالی به وسیله یک
کابل بوی که حرکت در محل ناله داده
شده است. انعطاف پذیری کابل
را می توان به K نمایش داد.
کابل به دور یک استوانه پیچیده شده
است. اصطکاک برای جلوگیری از لغزش
کابل است. فرکانس طبیعی نوسانات
کوچک را تعیین کنید. از جرم چرخه
صرف نظر کنید.

$$I_s = \frac{1}{2} m r^2 \quad ; \quad I_m = \frac{3}{2} m r^2$$

ابتدا مختصات را انتخاب می کنیم.
مختصات جابجایی مرکز جرم را تعیین می کنیم؛ سپس نسبت به مختصات جرم و مرکز معادل را برای سیستم
ی سه می کنیم.

$$x = r\theta \Rightarrow \dot{x} = r\dot{\theta}$$

انرژی جنبشی سیستم به
حرکت رانگشتی در نظر می گیریم.

$$E_c = \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m r^2 \right) \frac{\dot{x}^2}{r^2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m \right) \dot{x}^2$$

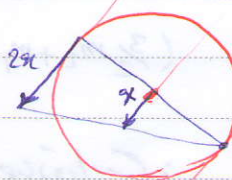
$$m_{eq} = \frac{3}{2} m$$

انرژی پتانسیل: از مکانیزم میانه باید متوجه شویم که فنر چه مقدار کشش می کند.

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (3x)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} (9k) x^2$$

$$k_{eq} = 9k$$



(در صورت جابجایی مرکز به اندازه x سمت بالای

چرخ $3x$ جابجایی شود. حال کابل و به عبارتی

فقر باید به اندازه $x + 2x$ افزایش طول داشته باشد.

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{9k}{\frac{3}{2}m}} = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

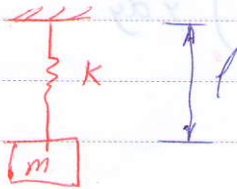
اگر چای α زاویه θ را بتوان فضا
انتخاب می‌کردیم در این صورت داریم:

$$E_c = \frac{1}{2} (\frac{3}{2}m) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} (\frac{3}{2}m r^2) \dot{\theta}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k (3r\theta^2) = \frac{1}{2} (9kr^2) \theta^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{9kr^2}{\frac{3}{2}mr^2}} = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

آنگاه ω مدت می‌شود فقط جسم و قطر
معدل تغییر کردند و جواب نهایی هیچ تغییری
نکرد و یکبار دیگر می‌توانیم ω نیز قطری باشد و نه جسم



برای تأثیر جسم قطر: در سیستمی که قطر و جسم داریم به محول
جسم قطر را به حساب نمی‌آوریم. اگر جسم قطر نداشته باشیم
آنگاه $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

خواهد بود.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

حال اگر جسم قطر را به حساب آوریم در رابطه ω تغییری خواهیم داشت؟ می‌توانیم به محول
این جسم در برابر حرکت افزایش می‌یابد و سیستم سنگین‌تر می‌شود و حرکتی و تندی سیستم
در برابر حرکت بیشتر می‌شود که در حرکت انتقالی به صورت جسم و در حرکت دورانی به صورت گشتاور
های حرکتی خودش را نشان می‌دهد.

$$p = \frac{m_f}{f}$$

فرضیات: جسم قطر برابر m_f باشد. ω جسم واحد طول قطر

برای نوشتن معدل قطر و جسم از روش انرژی استفاده می‌کنیم.

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$k_{eq} = k$$

می بینیم که x تغییری نگرفته است.

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_c(\text{قتر})$$

در قتر جرمی داریم، سرعت نقاط مختلف آن

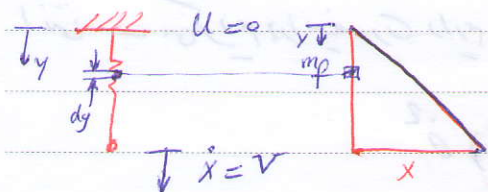
یکسان نیست و این مدل جدیدی است که در

گذشته نداشته ایم.

اگر فرض کنیم که سرعت نقاط مختلف بصورت

خطی تغییر کند و دینامیک آن بدین شکل می شود.

میدانیم که جرم می گیریم $\Leftarrow$



$$U_{dmp} = \frac{y}{\ell} \dot{x} \quad \text{و} \quad d m_f = \rho dy = \frac{m_f}{\ell} dy$$

این مدل طول قتر یا همان جرم در حکم یک ذره است. حال می توانیم انرژی یک جبهه یک ذره را

بنویسیم.

$$dE_c(\text{قتر}) = \frac{1}{2} (d m_f) \cdot (v_{dmp})^2 = \frac{1}{2} \frac{m_f}{\ell} dy \left(\frac{y}{\ell} \dot{x} \right)^2$$

$$\int dE_c = \int \frac{1}{2} \frac{m_f}{\ell^3} \dot{x}^2 y^2 dy \quad E_c(\text{قتر}) = \frac{1}{2} \frac{m_f \dot{x}^2}{\ell^3} \int y^2 dy$$

$$E_c(\text{قتر}) = \frac{1}{2} \left(\frac{m_f}{3} \right) \dot{x}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_f}{3} \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_f}{3} \right) \dot{x}^2$$

$$m_{eq} = \left(m + \frac{m_f}{3} \right)$$

می بینیم که $\frac{1}{3}$ جرم قتر در سیستم تأثیر دارد که جرم مؤثر می گویند.

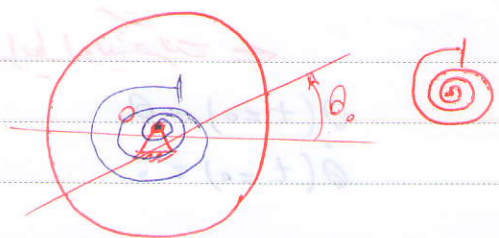
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_f}{3}}}$$

حال می توان امگای را نوشت که

جرم قتر را نیز به حساب آورده ایم:

می بینیم که ω را کوچکتر خواهد شد.

در این حال T (پریود) بیشتر می شود. (زمان یک بار تکرار می شود بیشتر می شود)



فقرهای پیچشی: (K_t) (Torsion)

دیسکی را در نظر می گیریم حول محور خودش
مغضول شده و می تواند بچرخد.

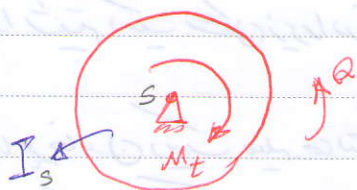
حال اگر فقر پیچشی را مورد استفاده قرار دهیم

و یک جرم خنثی به آن پیچش می دهیم اگر دیسک را

به اندازه θ بچرخانیم و در حالیکه دیسک شروع به نوسان می کند که نوسان پیچشی بوجود می آید.

ما در این محبت ثابت فقری داریم که با گذشت متفاوت است. بدین صورت که در صورت پیچش دیسک انرژی پتانسیل در فقر پیچشی ذخیره می کند که بصورت زیر نوشته می شود:

$K =$ نیروی بر واحد طول بود $K_t =$ نیروی در واحد طول
 $KX =$ نیروی بازگشت دهنده بود و $K_t \theta =$ گشتاور بازگشت دهنده است
 دارای رفت و برگشت خطی بود و رفت و برگشت دورانی دارد.
 حال اگر بخواهیم معادله حرکت را در حین حرکت بنویسیم:



$$M_t = K_t \theta$$

M_t : گشتاور بازگشت دهنده

$$[N \cdot m] = [N \cdot m] \cdot \text{rad}$$

$$K_t = [N \cdot m]$$

دین نیوتن

حال اگر بخواهیم معادله دینامیک حرکت را بنویسیم:

$$I_s \ddot{\theta} = \sum M_s = -M_t$$

$$I_s \ddot{\theta} = -M_t = -K_t \theta \quad \boxed{I_s \ddot{\theta} + K_t \theta = 0}$$

به بنیم که شکل کلی معادله دینامیک حرکت حقیقی است. بنابراین به یک طرف می توانیم
معادله قبلی برقرار است:

از جنس زاویه θ

$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{K_t}{I}} \quad \leftarrow \omega = \left[\frac{1}{s} \right] = \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$$

$$\theta(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$$

همان دینامیک قبلی

فقط A_1 و A_2 از جنس زاویه هستند.

$$\theta(t=0) = A \sin \varphi = \theta_0 \quad (1)$$

شرایط اولیه صریح ←

$$\theta(t=0) = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(t=0) = 0$$

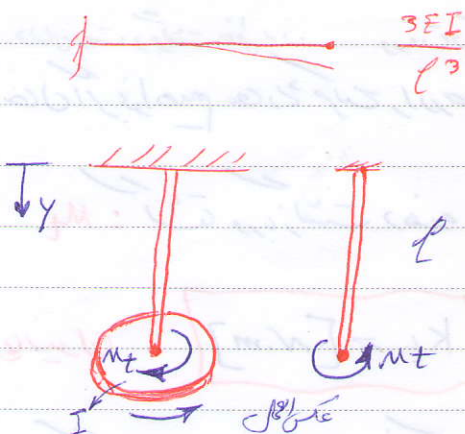
$$\dot{\theta}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad \dot{\theta}(t=0) = A\omega \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

$$(2) \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{in (1)} \Rightarrow$$

$$A = \theta_0$$

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



همانطور که برای یک تیر عادی حالت قری از نوع ماکسولی داشتیم این شکل نیز در نظر می گیریم:

با چرخاندن دیسک صلب حالت ارتجاعي از جنس پیمایش پدید می آید.

دول برشی = G

زاویه پیمایش در پائین بیش تر می مقدار است. (ف)

مقاومت (2)

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{M_t}{GI_p} = C$$

$$\varphi(y=0) = 0$$

$$\varphi(y=l) = \theta$$

پیمایش داریم.

اگر به است رابطه را کاملاً ثابت در نظر بگیریم. آن گاه

پیمایش است و هم ثابت است.

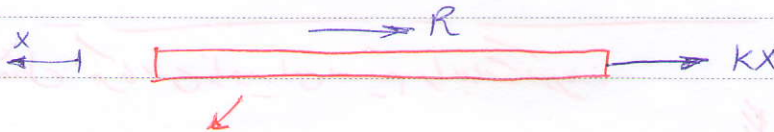
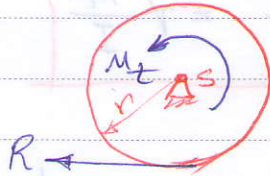
$$I_p = \text{نسبت درختی سطح دایره ای}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k_t \theta^2 = \frac{1}{2} \left(k + \frac{k_t}{r^2} \right) x^2$$

$$k_{eq} = k + \frac{k_t}{r^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{k + \frac{k_t}{r^2}}{m + \frac{I}{r^2}}}$$

روش نیوٹن اولیہ: فرض کیے کہ میٹہ یا نیوٹن حرکت کی کرتی ہے۔



$$m\ddot{x} = -R - kx \quad (1)$$

$$I\ddot{\theta} = I \frac{\ddot{x}}{r} = (\sum M)_S = R \cdot r - M_t$$

$$\frac{I}{r^2} \ddot{x} = R - \frac{M_t}{r} \quad (2)$$

$$M_t = k_t \theta = k_t \frac{x}{r}$$

$$(1) + (2) \quad \left(m + \frac{I}{r^2} \right) \ddot{x} = -kx - \frac{M_t}{r} = -kx - \frac{k_t}{r^2} x$$

$$\left(m + \frac{I}{r^2} \right) \ddot{x} + \left(k + \frac{k_t}{r^2} \right) x = 0$$

$$m_{eq} \ddot{x} + k_{eq} x = 0$$

شنبه: ۱۹ اردیبهشت: جلسه پنجم



ارتفاعات آزاد میرا:

$$\frac{dE}{dt} \neq 0$$

$$\frac{dE}{dt} < 0$$

در این صحت یک رابطه کلی داریم:

در این رابطه همواره منفی خواهد بود:

سوال: آیا بدون میرایی هم می توان اجازه نوشتن رابطه سیستمی دهد؟ باید ببینیم که برای هر میزان امکان نوشتن ضرایب در رابطه صحت می بیند

یک شرایط اولیه ای داریم که نوشتن را در نظر می گیریم: در ادامه آزاد را رسم می کنیم:



نیروهای فعال همین دو تا هستند.

اصل مکانیک نیوتن: برابر معادله تفاضلی حرکت می زنند

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

معادله حرکت $\Leftarrow$

حال باید این معادله را حل کرد. با استفاده از دانسته های معادلاتی می نویسیم:

$$x(t) = A e^{\lambda t} \rightarrow \dot{x} = A \lambda e^{\lambda t} \rightarrow \ddot{x} = A \lambda^2 e^{\lambda t}$$

حال جایگزینی می کنیم:

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k) A e^{\lambda t} = 0$$

حال می گوئیم عبارت بیرون پرانتز نمی تواند صفر

شود بنابراین عبارت داخل پرانتز باید صفر باشد که معادله معین می شود جواب مطرح است و به آن

معادله مشخصه می گویند که از اینجا (λ) را بدست می آوریم بر حسب m و c و k .

روشن حل:

معادله مشخصه را بر ضرب λ^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0$$

برای عبارت $\frac{k}{m}$ برای ماسه است. همان ω^2 است.

$$\frac{c}{m} = 2D\omega$$

برای جمله $\frac{c}{m}$ را ضریب زخمی از ده دانست:

$$\lambda^2 + 2D\omega \lambda + \omega^2 = 0$$

کامل معادله $\Leftarrow$

بالین کار می‌توان این معادله درجه 2 را حل نمود.

$$\lambda_{1,2} = -D\omega \pm \sqrt{D^2\omega^2 - \omega^2}$$

یا

$$\lambda_{1,2} = -D\omega \pm \omega \sqrt{D^2 - 1}$$

می بینیم که عبارت زیر رادیکال فقط یک یا کمتر

بنا بر D دارد. گاهی می‌توان فرضیه‌ای را مطرح کرد

به صورت اینست اگر D بزرگتر از صفر، برابر صفر و یا کوچکتر از صفر می‌باشد، معادله دانه

باشیم. بنابراین با این توضیحات برای معادله مشخصه همیشه جواب داریم.

اگر $D > 1$ باشد $\Leftarrow$ وقتی $D > 1$ باشد زیر رادیکال مثبت می‌شود و جواب

نهایی همواره منفی است. چون عبارت زیر رادیکال بتواند ضریب

یا کوچکتر از D می‌شود.

$D > 1 \Leftarrow$ هر دو پاسخ منفی می‌باشند. $\lambda_1 < 0$ و $\lambda_2 < 0$

$$x_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = A_2 e^{\lambda_2 t}$$

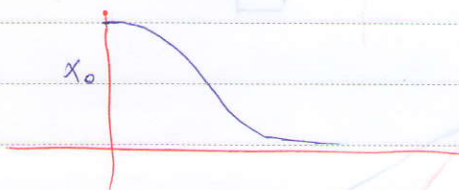
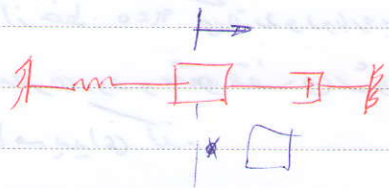
$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

جواب عمومی

اگر توابع نهایی به توان منفی باشند یعنی به سرعت کاهش می‌یابند و اگر به توان مثبت باشند به سرعت

افزایش می‌یابند. در این رابطه λ_1 و λ_2 منفی هستند.

وازش طرفی، x_1 و x_2 نمی توانند منفی باشند. این متغیرها می توانند از صفر رها شوند و توان کنند به منفی خود نمی رسد و حتی در محدوده منفی هم وارد نمی شود.



بنابراین در این حالت سیستم توان کمتری از یک جایابی اولیه به جایگاه قبلی خود برنمیگردد از حرکت بازی است. میرای بیش از حد لازم است.

و اگر کمتر وقت کنیم این حالت بخاطر D بود و اگر نگاه کنیم D با c ارتباط دارد و می فهمیم که c را زیاد انتخاب کردیم. بنابراین به هر میزان میرای نمی توان توان داشت که اصطلاحاً می گویند میرای بیش از حد لازم است و به آن حالت بیش میرا یا فوق میرا می گویند.

$$\lambda_{1,2} = -D\omega \pm \omega\sqrt{D^2 - 1}$$

$$\leftarrow D = 1 \quad \text{تجرب}$$

$$D = 1$$

$$\lambda_{1,2} = -\omega$$

در این حالت پاسخ مزدوج را خواهیم داشت:

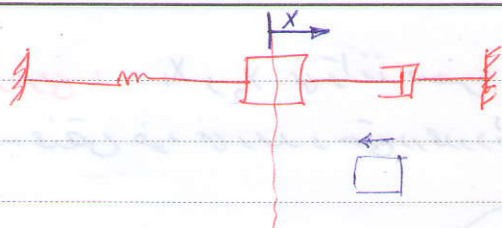
$$x_1(t) = A_1 e^{-\omega t}, \quad x_2(t) = A_2 t e^{-\omega t}$$

می بینیم که دو تا جواب یک جواب شد و چون باید در پاسخ عمومی دو تا جواب داشته باشیم باید در یک ضریب ضرب کنیم: (ضریب بنام t)

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\omega t}$$

جواب عمومی

معنای فیزیکی $\leftarrow$ دوباره $e^{-\omega t}$ می تواند متغیر رسیده است و سر به بالا گشت می یابد. حال می بینیم که $t e^{-\omega t}$ نمی تواند منفی شود، ولی $(A_1 + A_2 t)$ می تواند برای یک بار منفی

 $x(t)$ x_0

شود.

یا مثل حالت قبل رخ می دهد.

با از خط $x=0$ می تازد و دوباره به حالت

صفر می رود و متوقف می شود و نوسان

ادامه پیدا می کند.

(4)

بنابراین در این حالت هم نوسان نداریم. برای حالت خاص مرزی یا بحرانی داریم.
 * در این حالت محبت از میرایی بحرانی می شود یعنی بدافاصله اگر مقداری کمتر از آن گروه نوسان ایجاد خواهد شد.

اگر $D < 1$ ←

$$\lambda_{1,2} = -D\omega \pm \omega \sqrt{D^2 - 1}$$

می بینیم داخل رادیکال منفی می شود.

عبارت داخل رادیکال را از (1) فاکتور می گیریم:

$$\lambda_{1,2} = -D\omega \pm \omega \sqrt{-(1-D^2)} = -D\omega \pm i\omega \sqrt{1-D^2}$$

$$x_1(t) = A_1 e^{-(D\omega + i\omega \sqrt{1-D^2})t} = A_1 e^{-D\omega t} e^{-i\omega \sqrt{1-D^2} t}$$

$$x_2(t) = A_2 e^{-(D\omega - i\omega \sqrt{1-D^2})t} = A_2 e^{-D\omega t} e^{i\omega \sqrt{1-D^2} t}$$

 $\pm ix$

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

رابطهٔ اویلر (ریاضی) ←

وقتی $\sin$ و $\cos$ داریم یعنی نوسان داریم.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = e^{-D\omega t} \left(A_1 e^{i\omega\sqrt{1-D^2}t} + A_2 e^{-i\omega\sqrt{1-D^2}t} \right)$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1-D^2} \quad \leftarrow \text{فرکانس}$$

$$x(t) = e^{-D\omega t} \left[A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t} \right]$$

حال این رابطه را می توان برای شرایط اولیه باز نویسی کرد:

$$x(t) = e^{-D\omega t} \left[A_1 \cos \omega_d t + i A_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t + i A_2 \sin \omega_d t \right]$$

$$x(t) = e^{-D\omega t} \left[(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + i (A_1 - A_2) \sin \omega_d t \right]$$

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= B_1 \\ i(A_1 - A_2) &= B_2 \end{aligned} \quad \leftarrow \text{معمولی}$$

چون A_1 و A_2 فرکانس ثابت هستند قرار دادی نمی:

می توان $x(0) = x_0$ و $\dot{x}(0) = v_0$ را در این شرایط اولیه می نه:

مقادیر A_1 و A_2 بصورت معمولی میزنند یعنی: $A_1 = a + bi$, $A_2 = a - bi$

$$A_1 + A_2 = 2a \quad \text{Real} \quad \leftarrow \text{بنابراین داریم:}$$

$$i(A_1 - A_2) = i(2bi) = i^2 2b = -2b \quad \text{Real}$$

با این تو می تونی بنویسم:

$$x(t) = e^{-D\omega t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

$$x(t) = e^{-D\omega t} (B \sin(\omega_d t + \varphi)) \Rightarrow \begin{cases} B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \\ \tan \varphi = \frac{B_1}{B_2} \end{cases}$$

$$x(t) = B e^{-D\omega t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

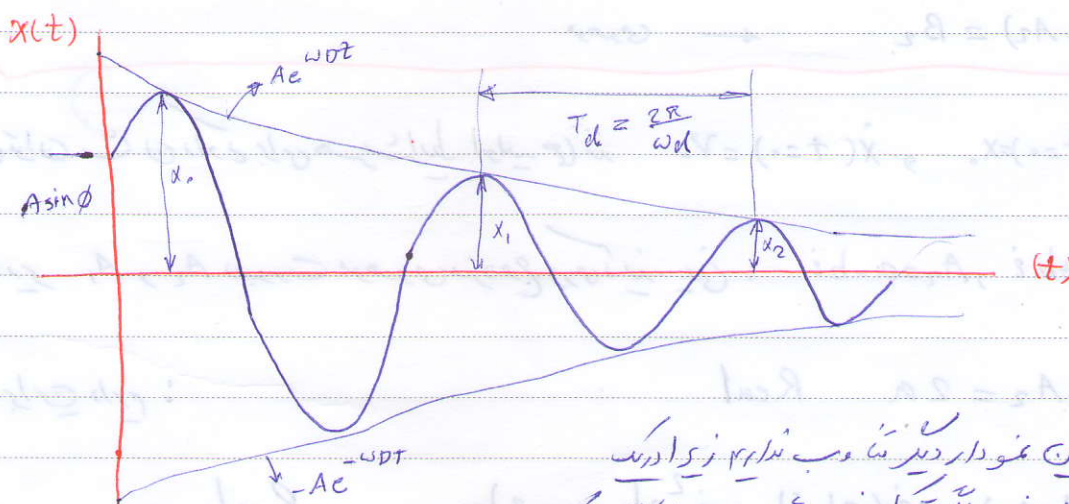
رابطه اصلی و کلی برای حالت نوسان

$$x(t) = B_g \sin(\omega t + \varphi_1)$$

رابطه حالت نامیرا:

$$\omega_d = \omega \sqrt{1-D^2} = \omega \quad D=0 \quad \text{اگر } D=0 \text{ باشد در حالت نامیرا}$$

$$D=0 \quad x(t) = B \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{و این رابطه درستی روابط بدست آمده را نشان می‌دهد}$$



در این نمودار دیرینه‌تأخیر و بزرگ‌ترین زیرادریک
بازده زمانی عیناً تکرار می‌شود و بی‌زمان یک
بار رفت و برگشت آن برابر است (چون عبارت سینوسی است) و بطور کلی به این معنی یک متغیر
شبیه می‌نویسند.

$$\omega_d = \omega \sqrt{1-D^2}$$

فرکانس زاویه‌ای سیستم های میرا

و همواره $\omega_d < \omega$ می باشد فرکانس تناوب رای نویسیم:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1-D^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-D^2}}$$

$$T < T_d$$

زمان تناوب در حالت نامیرا از زمان تناوب در حالت میرا کوچکتر می شود.

باید دقت کنیم که در نمودار صفحه قبل بین دامنه های نوشته شده یک رابطه ثابتی برقرار است:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \delta \quad (\text{دلتا})$$

حال باید δ را تعیین کنیم:

$$x(t) = A e^{-D\omega t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

$$x(t+T_d) = A e^{-D\omega(t+T_d)} \sin[\omega_d(t+T_d) + \varphi]$$

می توانیم اثبات کرد که دو برابر δ و $\ast$ با هم برابرند.

$$\ast \sin[\omega_d T_d + \omega_d t + \varphi] = \sin[2\pi + \omega_d t + \varphi] = \sin(\omega_d t + \varphi)$$

و می دانیم که 2π به اضافه هر عددی خود را عددی می شود.

$$\frac{x(t)}{x(t+T_d)} = \frac{A e^{-D\omega t}}{A e^{-D\omega(t+T_d)}} = e^{D\omega T_d}$$

$$2D\omega = \frac{c}{m}$$

$$\ln \frac{x_0}{x_1} = D \omega T_d = D \omega \frac{2\pi}{\omega d} = \frac{2\pi D \omega}{\omega \sqrt{1-D^2}}$$

$$\ln \frac{x_0}{x_1} = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{x_2}{x_3} = \dots$$

برای رابطه کاهش گامی گویند یعنی $\leftarrow$

$$\ln x_0 - \ln x_1 = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$$

نسبت میرایی:

$$\frac{c}{m} = 2D\omega \xrightarrow{D=1} \frac{c_e}{m} = 2\omega$$

$$c_e = 2m\omega$$

$$\frac{c}{c_e} = \frac{2mD\omega}{2m\omega} = D$$

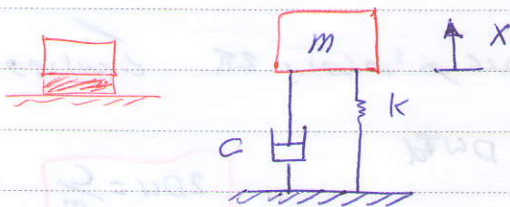
نسبت میرایی $\uparrow$ ضریب میرایی بحرانی

و برای اینکه نوسان کامل داشته باشد باید $D < 1$ باشد بنابراین:

$$D < 1 \Rightarrow c < c_e \Rightarrow c < 2m\omega = 2\sqrt{km}$$

$$c < 2\sqrt{km}$$

مسطح نوسان $\leftarrow$



اگر یک بالستیک داشته باشیم خاصیت میرایی در دو وجه خاصیت فیزیکی. بنابراین برای مدل کردن آن بدین شکل عمل می‌کنیم.

وقتی جسم روی بالستیک قرار می‌گیرد و در بالستیک داریم؛ تغییر شکل فنر در حالت ایستایی x_{st} به چیز استاتیکی

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - D^2}$$

فرکانس زاویه‌ای سیستم های میرا

و همواره $\omega_d < \omega$ می باشد فرکانس تناوب رای نویسیم

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - D^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - D^2}} \quad T < T_d$$

زمان تناوب در حالت نامیرا از زمان تناوب در حالت میرا کوچکتر می شود.

باید دقت کنیم که فرمودار منفرد قبل بین دامنه های نوشته شده یک رابطه ثابتی برقرار است:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \delta \quad (\text{دلتا})$$

حل باید δ رای سبب کنیم:

$$x(t) = A e^{-D\omega t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

$$x(t + T_d) = A e^{-D\omega(t + T_d)} \sin[\omega_d(t + T_d) + \varphi]$$

می توان اثبات کرد که دو برابر δ و δ با هم برابرند.

$$\sin[\omega_d T_d + \omega_d t + \varphi] = \sin[2\pi + \omega_d t + \varphi] = \sin(\omega_d t + \varphi)$$

و می دانیم که 2π به اضافه هر عددی خود را عددی می شود.

$$\frac{x(t)}{x(t + T_d)} = \frac{A e^{-D\omega t}}{A e^{-D\omega t - D\omega T_d}} = e^{D\omega T_d} \quad \boxed{2D\omega = \frac{c}{m}}$$

$$\ln \frac{x_0}{x_1} = D \omega T_d = D \omega \frac{2\pi}{\omega d} = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$$

$$\ln \frac{x_0}{x_1} = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{x_2}{x_3} = \dots$$

برای رابطه کاهش گام رستنی گویند یعنی $\leftarrow$

$$\ln x_0 - \ln x_1 = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$$

نسبت میرایی:

$$\frac{C}{m} = 2D\omega \xrightarrow{D=1} \frac{C_c}{m} = 2\omega$$

$$C_c = 2m\omega$$

$$\frac{C}{C_c} = \frac{2mD\omega}{2m\omega} = D$$

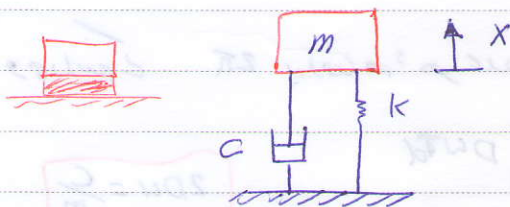
ضریب میرایی بحرانی $\uparrow$ نسبت میرایی

و برای آنکه نوسان کاهش داشته باشد باید $D < 1$ باشد بنابراین:

$$D < 1 \Rightarrow C < C_c \Rightarrow C < 2m\omega = 2\sqrt{km}$$

$$C < 2\sqrt{km}$$

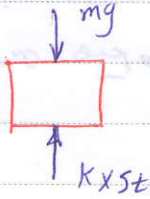
مشرط نوسان $\leftarrow$



اگر یک بالستیک داشته باشیم هم خاصیت میرایی در رد و هم خاصیت فیزی. بنابراین برای مدل کردن آن بدین شکل عمل می‌کنیم.

وقتی جسم روی بالستیک قرار می‌گیرد یک فیز در بالستیک داریم؛ تغییر شکل فز در حالت ایستایی x_{st} به جز استاتیسی

برای بدست آوردن خیز استاتیکی کافی است معادلات تعادل را برای سیستم بنویسیم:



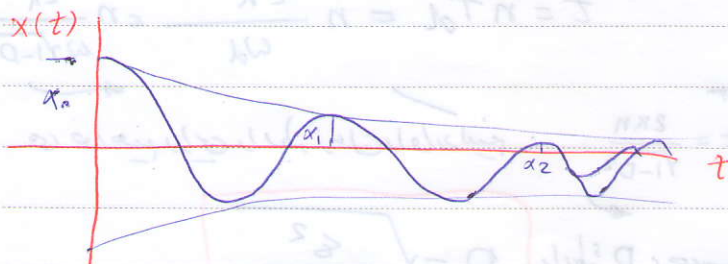
میراث در حالت ایستایی هیچ تأثیری ندارد چون
در حالت ایستای صفر است و میراثی تابعی از
سرعت است.

$$kx_{st} = mg \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{x_{st}} = \omega^2$$

یعنی با داشتن خیز استاتیکی می توان ω (آمپ) سیستم یعنی فرکانس ناهوایی را میراث بدست
آوریم. حال بی خود هم روتر را بر سر کشیم تا در حالت میراث بدست آوریم.
اگر سیستم در حال تعادل را که به سمت پایین حرکت می کنیم. با این کار دامن به
سیستم می دهیم.

$$\Rightarrow \dot{x}(t=0) = 0 \quad \text{و} \quad x(t=0) = x_0$$

اگر یک جایی اولی ای دهم و بدون سرعت اولیه در حالت سیستم شروع به نوسان می کند و خیلی زود
می آید که در این حالت x_0 دامن اولیه سیستم می شود.



در این حالت می نویسیم:

$$\ln \frac{x_0}{x_1} = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \Rightarrow D = ?$$

$$D = \frac{c}{2m\omega}$$

با این روش می توان نسبت میرای را حساب کرد.

برای جلوگیری از خطای اندازه گیری مثلاً برای اندازه گیری x_0 از روش دیگری هم
استفاده می کنند.

می توانیم بگوییم مثلاً بطور حدودی بعد از چند مرتبه رفت و برگشت نوسان سیستم قطع می شود و یا به عبارتی دامنه نوسان خارج سیستم صفر شد (نزدیک صفر) این چند مرتبه را برابر با قرار می دهیم و زمان تناوب را می توان حساب کرد.

$$T_d = \frac{t}{n}$$

$$\text{if } n=5 \Rightarrow \frac{x_0}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_4} \cdot \frac{x_4}{x_5}$$

$$\ln \frac{x_0}{x_5} = \ln \left(\frac{x_0}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_4} \cdot \frac{x_4}{x_5} \right) = \ln \frac{x_0}{x_1} + \ln \frac{x_1}{x_2} + \dots + \ln \frac{x_4}{x_5}$$

$$\ln \frac{x_0}{x_1} = \ln \frac{x_1}{x_2} = \dots = \ln \frac{x_4}{x_5} = \delta$$

$$\ln \frac{x_0}{x_5} = 5\delta \Rightarrow \ln \frac{x_0}{x_n} = n\delta = n \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$$

$$\ln \frac{x_0}{x_n} = \frac{2\pi n D}{\sqrt{1-D^2}}$$

$$t = n T_d = n \frac{2\pi}{\omega_d} = n \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1-D^2}}$$

$$\omega t = \frac{2\pi n}{\sqrt{1-D^2}}$$

می خواهیم برای رابطه زمان را وارد کنیم

$$\ln \frac{x_0}{x_n} = \omega D t$$

رابطه D بر حسب δ

$$D = \sqrt{\frac{\delta^2}{\delta^2 + 4\pi^2}}$$

مثلاً: نسبت دامنه های متوالی (ارتفاشی یک سیستم مکانیکی اگر نسبت میرایی نرغ

$D=0.15$ باشد چقدر است؟

$$\ln \frac{x_0}{x_1} = \delta \text{ (داده)} \Rightarrow \frac{x_0}{x_1} = e^\delta$$

$$\delta = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \quad ?$$

و از طرفی $\Leftarrow$

مثال: نسبت دامنه های متوالی یک سیستم (10:1) است. اگر مقدار میرایی دو برابر شود، نسبت دامنه های متوالی چقدر خواهد بود؟

8 معلوم است. $\ln \frac{x_0}{x_1} = \frac{2\pi D_1}{\sqrt{1-D_1^2}} = \ln 10 = \delta_1$

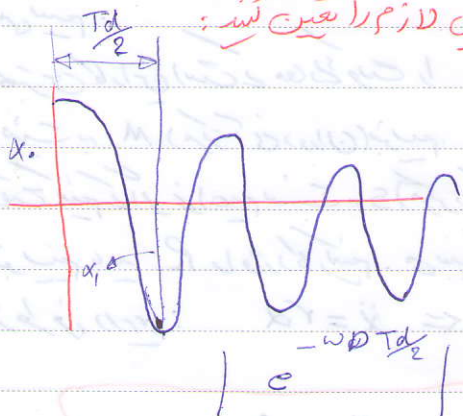
$$\ln \frac{x_0}{x_1} = \frac{2\pi D_2}{\sqrt{1-D_2^2}} = \frac{2\pi 2D_1}{\sqrt{1-4D_1^2}}$$

ابتدا با استفاده از رابطه D بر حسب δ ، D_1 را می بینیم:

$$D_1 = \sqrt{\frac{\delta_1^2}{\delta_1^2 + 4\pi^2}} \quad , \quad D_2 = \sqrt{\frac{\delta_2^2}{\delta_2^2 + 4\pi^2}}$$

$$\sqrt{\frac{\delta_2^2}{4\pi^2 + \delta_2^2}} = 2 \sqrt{\frac{\delta_1^2}{4\pi^2 + \delta_1^2}}$$

مثال: طرح یک فیلتر باید چنانچه ضریب میرایی در آن زیاد شود به 10٪ بیشتر باشد. بیش از حالت تعادل محدود شده باشد. نسبت میرایی لازم را تعیین کنید:



$$|x_1| = 0.1 x_0$$

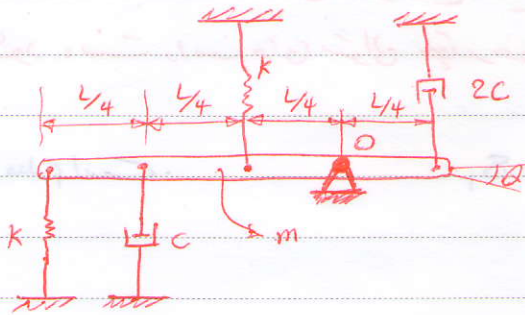
$$Ae^{-\omega D t_0} = x_0 = Ae^{-\omega D (t_0 + T_d/2)} = 0.1 x_0$$

$$|e^{-\omega D T_d/2}| = 0.1$$

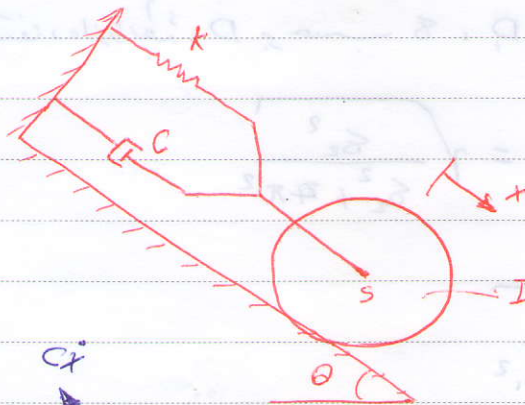
$$\ln 10 = \frac{\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$$

$$D = \sqrt{\frac{(2.3)^2}{(2.3)^2 + \pi^2}} = 0.59$$

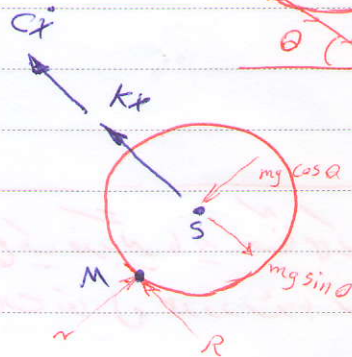
حاصل شده ششم : ۹۱،۱،۲۲ : شب



مثلاً یک میله باریک به جرم m داریم که از
خیزها و میرا کننده ها تشکیل شده است. برای
سیستم (الف) معادله دیفرانسیل حرکت بدوین نقطه را
و انرژی ب) ضریب میرایی بحرانی
را بدست آورید.



مثلاً ۱۲. برای سیستم بر روی معادله دیفرانسیل
حرکت را بدوین نقطه های نیوتن - مادلر و انرژی
ی بسط کرده و ضریب میرایی بحرانی را
نیز بدست آورید.



و وقتی سیستم به این شکل قرار دارد یعنی
از قبل به تعادل استاتیکی رسیده است
پس باید از نیروی وزن صرف نظری کنیم.
پس برای دیگر گرام نیروهای فعال داریم
می کنیم.

حرکت کار این است که معادله حرکت را
نسبت به M (مرکز گسی دوران) بنویسیم.

دقت کنیم که اگر خواصیم نسبت به S (مرکز گسی)

بنویسیم باید R را وارد کار کنیم. می بینیم که تنها نیروی که نسبت به S ایجاد می کند (در این حالت) فقط R باشد.
از طرف دیگر داریم: $\dot{x} = r\alpha$ پس:

$$\left(m + \frac{I_S}{r^2}\right) \ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}m\right) \ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$I_m \alpha = (\sum M)_M$$

حال نسبت به مرکز دوران می نویسیم:

$$\frac{3}{2} m r^2 \ddot{\alpha} = -c \dot{x} r - k x r \quad \left(\frac{3}{2} m \right) \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k_{eq}}{m_{eq}} = \frac{2}{3} \frac{k}{m}$$

$$(m_{eq}) \ddot{x} + (c_{eq}) \dot{x} + (k_{eq}) x = 0$$

$$2D\omega = \frac{c_{eq}}{m_{eq}} = \frac{2}{3} \frac{c}{m}$$

$$\frac{c_{eq}}{m_{eq}} = 2D\omega = 2D \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad \star$$

$$c_{eq} = 2D \sqrt{k_{eq} m_{eq}}$$

این را بطور راهواره می توانیم بنویسیم

$$c = 2D \sqrt{k \frac{3}{2} m} \quad \text{if } D=1$$

$$c_c = 2 \sqrt{\frac{3}{2} k m}$$

ضریب میرایی
مبدائی

برای D مناسب: برای این کار می توان از رابطه $\star$ استفاده کرد.
فرکانس زاویه ای میرا ω_d چقدر است؟

$$\star \omega_d = \omega \sqrt{1-D^2} = \sqrt{\omega^2 - (\omega D)^2} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{k}{m} - \left(\frac{1}{3} \frac{c}{m}\right)^2}$$

اگر جواب معادله تفاضلی مرتبه را بخواهیم:

$$x(t) = A e^{-D\omega t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

در این رابطه $D\omega$ و ω_d معلوم

شدند و معیولات فقط A و φ

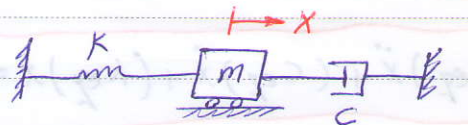
هستند که باید از شرایط اولیه (مثلاً

تغییر) بدست آورده و فقط $x(0)$ (زمان)

باقی ماندگار جایابی در هر خط را می سبب می شود و اگر از $x(t)$ مشتق بگیریم سرعت در هر خط را می توان بدست آورد.

روش انرژی برای بدست آوردن معادلات دینامیک برای سیستم دالای ارتعاش آزاد میرا :

انرژی مکانیکی یا پتانسیل یعنی ثابت $E \neq 0$ در نتیجه $\frac{dE}{dt} \neq 0$

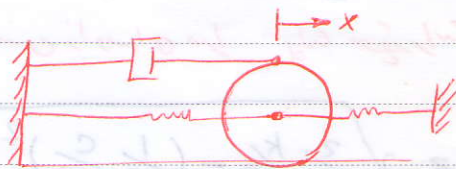
و چون انرژی مکانیکی کاهش می یابد $\frac{dE}{dt} < 0$.


از دینامیک $\leftarrow$ کار نیروهای غیر پتانسیل $w' = E_2 - E_1 = w'$

منفی بخاطر این است که کار در خلاف میرای وارد می شود.
 $\Delta E = -c \dot{x} \Delta x$

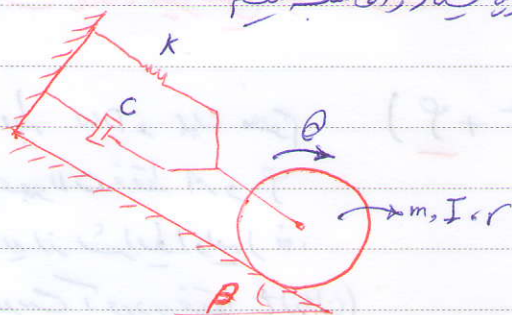
$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = -c \dot{x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = -c \dot{x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

جایابی جسم m با جایابی نقطه اثر نیروی میراکننده یکسان است و در سیستم شکل مقابل برای پتانسیل آنجا که
 $\frac{dE}{dt} = -c \dot{x} \frac{dx}{dt} = -c \dot{x}^2$



$$\frac{dE}{dt} = -c \dot{x}_c^2$$

دقت شود که در این مسئله بعنوان نیروی غیر پتانسیل فقط یک میرای داریم که اگر در مثلهای دوما میرای داشته باشیم باید کار هر دو نیروی غیر پتانسیل را حساب کنیم.



مثلهای می کنیم که در رابطه زاویه θ اصلاً نیامده است که نشان از این دارد که شیب

در جواب معادله هیچ تأثیری ندارد.

انرژی پتانسیل گرانش و انرژی پتانسیل الاستیکی

فقط با حساب می آوریم چون نیروی وزن را

وارد کرده نفرمودیم. (در نیروی فنر) راحت با کاریم

این دو انرژی همگی را جمع می کردیم.

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m \dot{x}^2 \right) + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{dE}{dt} = -C \dot{x}^2 = -C \dot{x}^2 \quad \frac{3}{2} m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = -C \dot{x}^2$$

$$\dot{x} \left(\frac{3}{2} m \ddot{x} + C \dot{x} + k x \right) = 0$$

از آنجایی که $\dot{x}$ برای همه لحظات صفر نیست

بنابراین باید عبارت داخل پرانتز صفر باشد:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3}{2} m \ddot{x} + C \dot{x} + k x = 0}$$

معادله دیفرانسیل حرکت

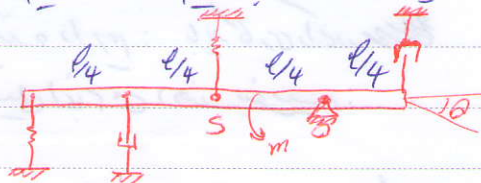
ادامه محمولات بر اساس معادله نوشتاری شود.

حل مسئله شماره (1): یکی از چیزهای مورد نیاز I_0 است. اگر اسم مرکز جرم

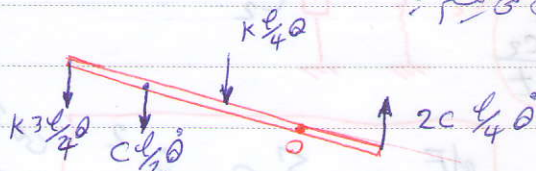
میل را S بگذاریم، آنوقت داریم:

$$I_0 = I_S + m \overline{OS}^2$$

$$I_0 = \frac{1}{12} m l^2 + m \frac{l^2}{16} = \frac{7}{48} m l^2$$



حال میل را در حالت شیب دار (ارتفاع) فرض می‌کنیم:



$$v = \frac{l}{4} \dot{\theta}$$

$$I_0 \ddot{\theta} = (\sum M)_0 \Rightarrow \frac{7}{48} m l^2 \ddot{\theta} = (\sum M)_0$$

$$\left(\frac{7}{48} m l^2 \right) \ddot{\theta} = -\frac{1}{2} C \frac{l^2}{4} \dot{\theta} - k \frac{l^2}{16} \theta - C \frac{l^2}{4} \dot{\theta} - k \frac{9}{16} l^2 \theta$$

$$\boxed{\frac{7}{48} m \ddot{\theta} + \frac{3}{8} C \dot{\theta} + \frac{10}{16} k \theta = 0} \quad \text{معادله دیفرانسیل حرکت}$$

$$\left(\frac{7}{6} m \right) \ddot{\theta} + (3) C \dot{\theta} + (5) k \theta = 0$$

meq

ceq

keq

$$\omega^2 = \frac{k_{eq}}{m_{eq}} = \frac{30}{7} \frac{K}{m} \quad ; \quad 2D\omega = \frac{C_{eq}}{m_{eq}} = \frac{18}{7} \frac{C}{m}$$

برای ضربه و ضربه برای بران

$$C_{eq} = 2D \sqrt{k_{eq} m_{eq}} \Rightarrow 3C = 2D \sqrt{\frac{35}{6} Km} \quad | \quad D=1$$

$$C_c = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{35}{6} Km}$$

ضربه میرایی برای

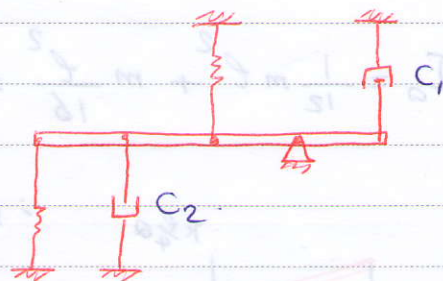
$$C < C_c \Leftrightarrow D < 1 \quad \leftarrow \text{شرط نوسان}$$

$$C < \frac{2}{3} \sqrt{\frac{35}{6} Km} \quad \text{این رابطه باید برقرار باشد تا نوسان داشته باشیم}$$

روش انرژی: دقت شود در این مورد دو میرا کننده داریم: باید کاری را که در میرا کننده
جای می دیند بررسی کنیم: می دهند بشویم:

$$dw' = -c_1 \dot{x}_{c1} dx_{c1} - c_2 \dot{x}_{c2} dx_{c2}$$

$$\frac{dw'}{dt} = -c_1 \dot{x}_{c1} \frac{dx_{c1}}{dt} - c_2 \dot{x}_{c2} \frac{dx_{c2}}{dt}$$



$$\frac{dw'}{dt} = -c_1 \dot{x}_{c1}^2 - c_2 \dot{x}_{c2}^2$$

$$\frac{dE}{dt} = -\sum c_k \dot{x}_{ek}^2$$

رابطه کلی
برای میرا کننده
میرا کننده

$$E_c = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 \quad (\text{انرژی جنبشی}) \quad (\text{دوران حول یک محور ثابت})$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \left(\frac{3l}{4} \theta \right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{l}{4} \theta \right)^2$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{10}{16} K l^2 \right) \theta^2$$

$$\frac{dE}{dt} = I_o \ddot{\theta} + \frac{10}{16} k l^2 \dot{\theta} = -2c \left(\frac{l}{4} \dot{\theta} \right)^2 - c \left(\frac{l}{2} \dot{\theta} \right)^2 =$$

$$= \frac{3}{8} c l^2 \dot{\theta}^2$$

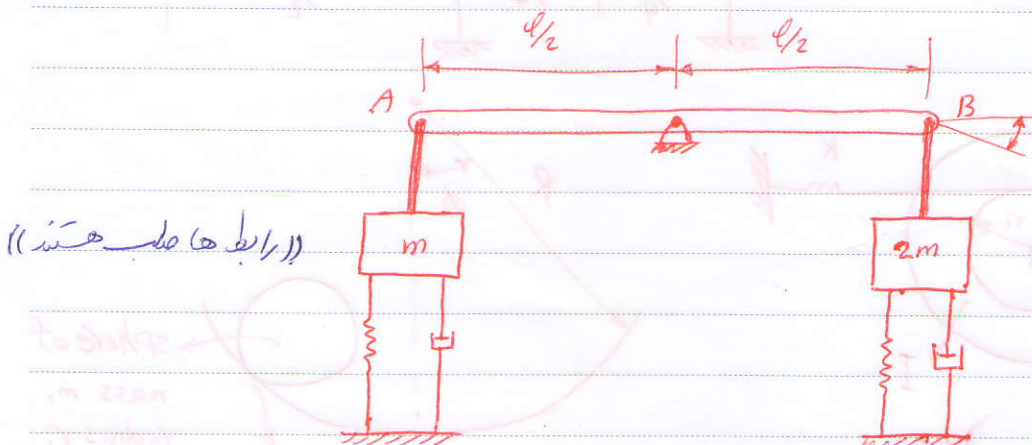
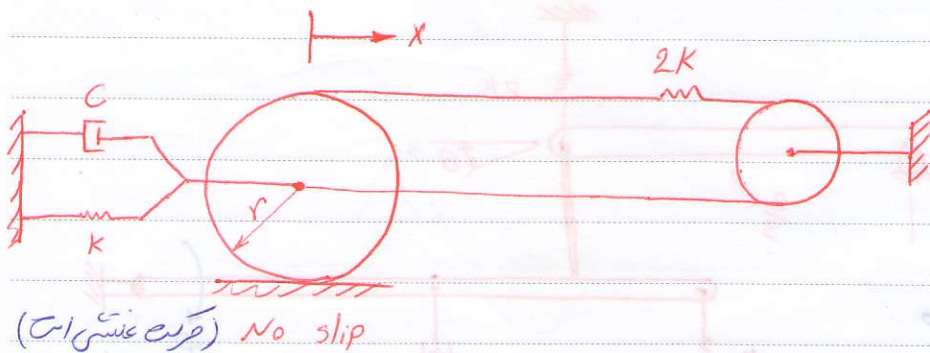
$$\dot{\theta} \left[I_o \ddot{\theta} + \frac{10}{16} k l^2 \dot{\theta} + \frac{3}{8} c l^2 \dot{\theta} \right] = 0$$

$$\frac{7}{48} m l^2 \ddot{\theta} + \frac{3}{8} c l^2 \dot{\theta} + \frac{10}{16} k l^2 \theta = 0$$

$$\left(\frac{7}{6} m \right) \ddot{\theta} + (3c) \dot{\theta} + (5k) \theta = 0$$

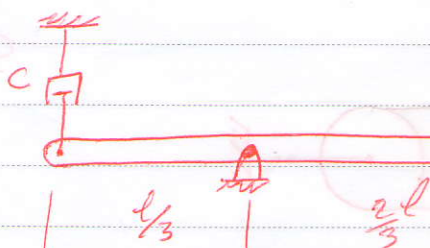
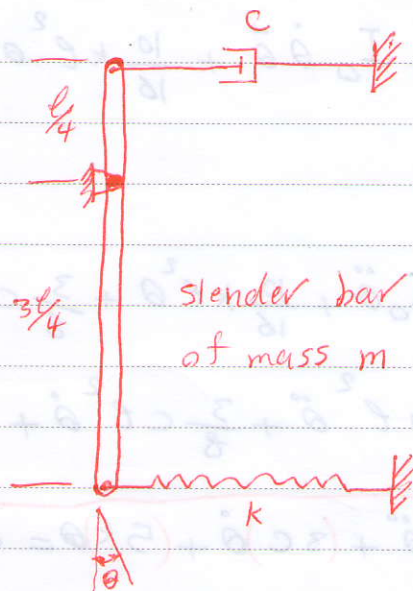
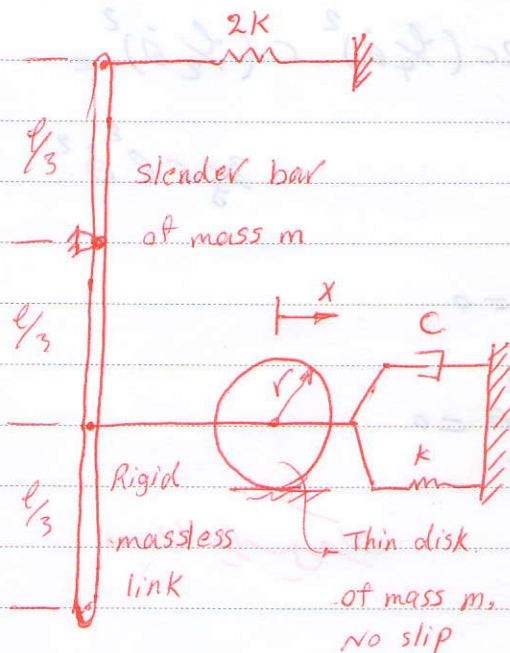
$m_{eq} \quad c_{eq} \quad k_{eq}$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

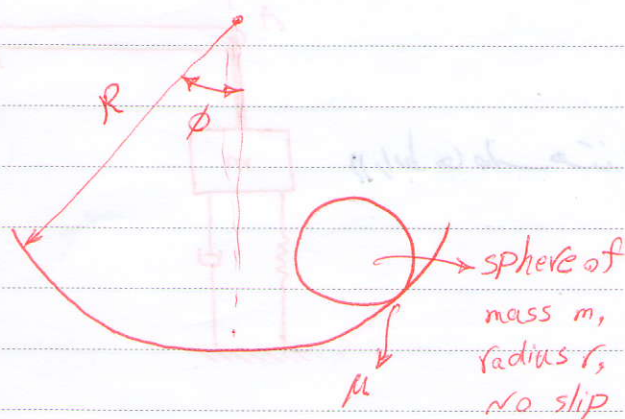
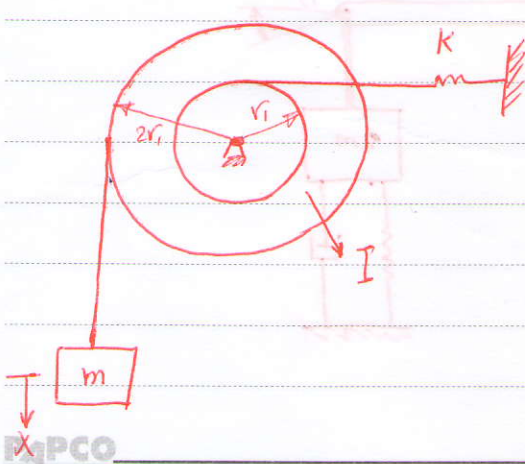
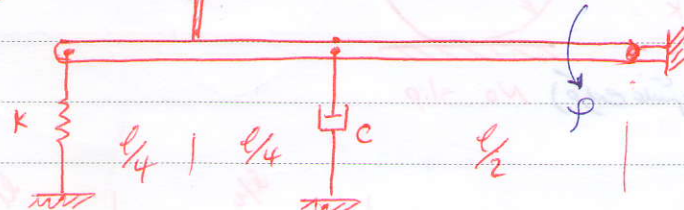


Subject:

Year. Month. Date. ()

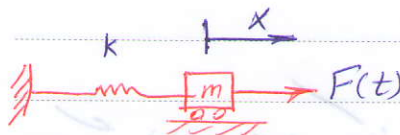


$$\frac{2l}{3} \dot{\theta} = \frac{3l}{4} \dot{\phi}$$



ارتعاشات وادامته (اجباری): (۱) بدون میرایی

(۲) با میرایی



مسئله مورد استفاده در این محبت بدین شکل است:
یعنی نیروی داریم که همواره به سیستم وارد می شود.

$$m\ddot{x} = -kx + F(t)$$

و اما بعد از آن در این حالت: دیگر می توانیم از معادله استفاده کنیم

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

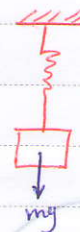
و معادله ای غیر همگن داریم:

if $F(t) = F_0$

حالت های مختلف: (۱)

$$m\ddot{x} + kx = F_0$$

بسیار



در $x=0$ نقطه طول عاری خود

را دارد. یعنی x را از نقطه میانه می گیریم.

$$m\ddot{x} + kx = mg$$

حال برای معادله را به صورت جواب داریم.

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

یکی پاسخ همگن که با غدار در بر وقت می دهند: $x_h(t)$

و دیگری پاسخ غیر همگن: $x_p(t)$ یا $x_{inh}(t)$

$$x_h(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$$

جواب همگن ←

و اما جواب غیر همگن دقیقاً

رابطه ای با طرف مقابل نمی دارد. برای حل پاسخ غیر همگن را ثابت فرض می کنیم. $x_p(t) = C_1$

$$m \cdot 0 + kC_1 = F_0 = mg \Rightarrow C_1 = \frac{F_0}{k} = \frac{mg}{k}$$

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \frac{F_0}{k} + A \sin(\omega t + \varphi)$$

پس پاسخ عمومی

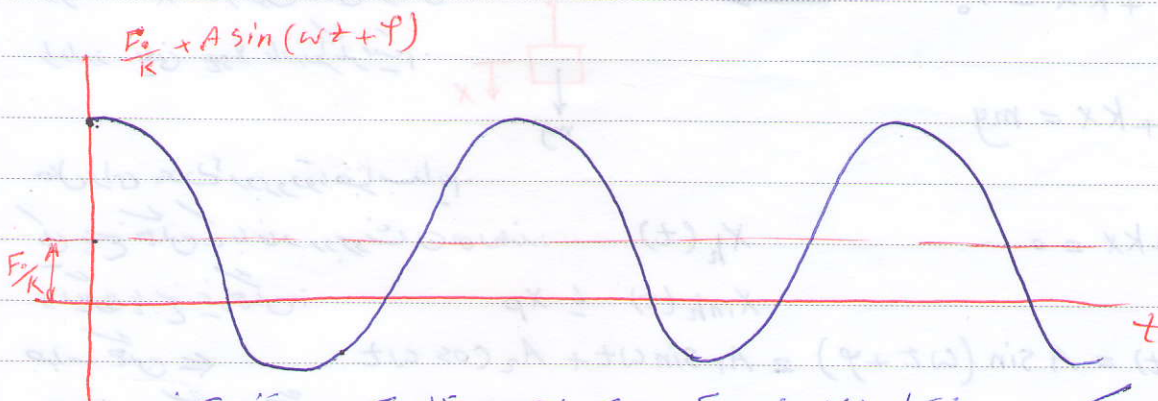
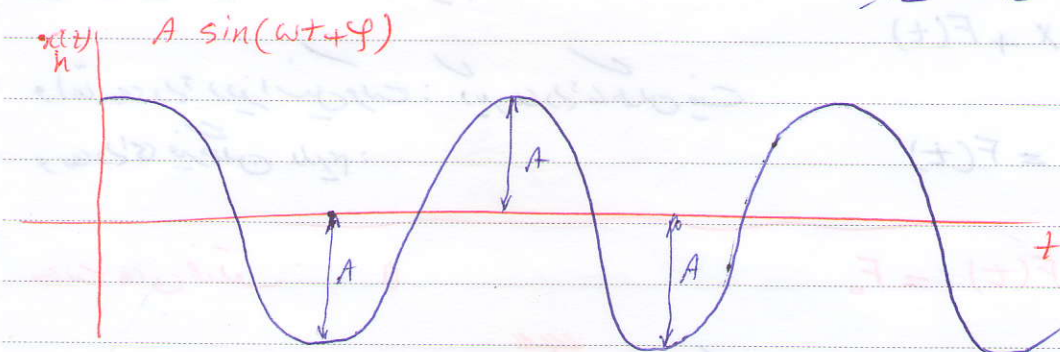
$$x(t) = \frac{mg}{k} + A \sin(\omega t + \varphi)$$

و در این حالت خاص $F_0 = mg$ ←

* تفاوت جواب عمومی با $x_h(t)$ فقط در این رقم است که همان x_{st} است.

$$x(t) = x_{st} + A \sin(\omega t + \varphi)$$

حال اگر بخواهیم رسم کنیم:



و بینیم که نمودار فقط با اندازه F_0/K بالاتر رفت و از نظر T و φ تفاوت ندارد.

مسئله برین حالت برای نیروی محرک یک نیروی محرک هارمونیک است.

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t \quad \text{حالت (۲)} \quad \boxed{\omega \leftrightarrow \Omega} \quad \omega \leftrightarrow \Omega$$

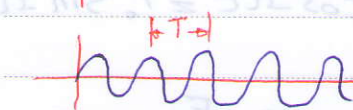
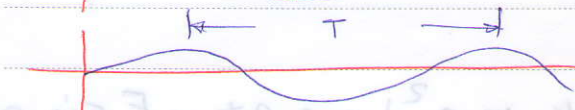
Ω به فرکانس زاویه ای نیروی محرک و اگر بخواهیم فرکانس نیروی محرک را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$f 2\pi = \Omega \quad \boxed{f = \frac{\Omega}{2\pi}}$$

فرکانس نیروی محرک

که F_0 دامنه نیروی محرک خواهد بود.

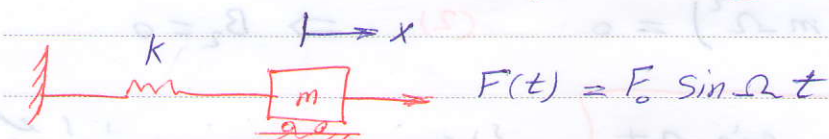
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$



اگر فرکانس کمتر شود آنگاه (T بزرگتر می شود)

و اگر فرکانس زیادتر شود آنگاه (T کوچکتر می شود)

می خواهیم بدانیم برای همین نیروی جوابی سیستم به ما می دهد چیست؟



$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$x_h(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$$

$$x_p(t) = B \sin(\omega t + \delta) = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t$$

داده (مقداری ثابت)

حل $x_h(t)$ و $x_p(t)$ را به کمک دیرانسیل قرار می دهیم:

$$\ddot{x}_p(t) = -B \omega^2 \sin(\omega t + \delta) = -B_1 \omega^2 \sin \omega t - B_2 \omega^2 \cos \omega t$$

$$-m B \omega^2 \sin(\omega t + \delta) + k B \sin(\omega t + \delta) = F_0 \sin \omega t$$

$$B(k - m \omega^2) \sin(\omega t - \delta) = F_0 \sin \omega t$$

این رابطه را در معادله دیرانسیل قرار می دهیم بهتر است.

$$-m B_1 \omega^2 \sin \omega t - m B_2 \omega^2 \cos \omega t + k B_1 \sin \omega t + k B_2 \cos \omega t = F_0 \sin \omega t$$

$$B_1 (k - m \omega^2) \sin \omega t + B_2 (k - m \omega^2) \cos \omega t = F_0 \sin \omega t$$

$$B_1 \neq 0 \quad B_1 (k - m \omega^2) = F_0 \quad (1) \Rightarrow B_1 = \frac{F_0}{k - m \omega^2}$$

$$B_2 (k - m \omega^2) = 0 \quad (2) \Rightarrow B_2 = 0$$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k - m \omega^2} \sin \omega t$$

همین نیرو سینوسی بود پاسخ هم دینفرانسیل هم سینوسی شد. اما دامنه آن دایره شکل خاصی است که بصورت یک

کسر در آمده است مخصوصاً آنهایی که خارج کسرها هم سینوسی و کسرها هم سینوسی است. در این صورت به دست می آید معنی آن برای سیستم نوسانی چیست؟

$$\hat{x}_p = \frac{F_0}{k - m \omega^2}$$

فاما معمولاً دامنه را بصورت x_p داخل $\wedge$ (سقف) می نویسیم

$$x_p(t) = \hat{x}_p \sin \omega t$$

$$\hat{x}_p = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{m}{k} \omega^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

از k قانون هکس

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi f}{2\pi f_n}$$

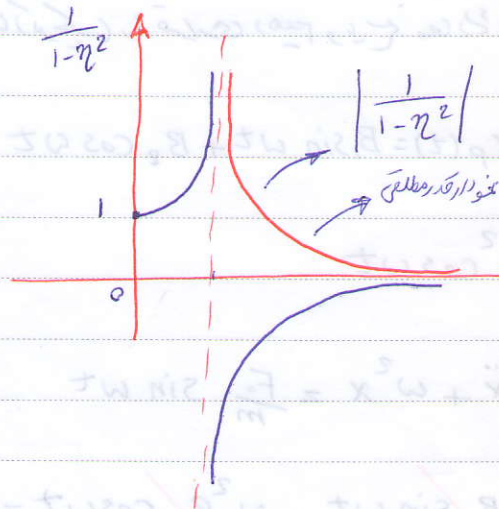
مفهوم جدید: نسبت فرکانس ها:

$$\eta = \frac{f}{f_n} = \frac{\text{فرکانس}}{\text{فرکانس طبیعی}}$$

$$\hat{x}_p = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1-\eta^2}$$

این یی رخ

حال می نویسیم η زمانی (۱) می شود نسبت
 ϕ (فرکانس نیرو) با ϕ_n (فرکانس طبیعی) برابر
 باشد. آنگاه دامنه پاسخ غیر چگن به سمت
 بی نهایت می رود (بسیار بزرگ) که این پدیده را تشدید یا رزونانس می نامند.



$$\alpha(\eta) = \frac{1}{1-\eta^2}$$

$$\alpha(\eta) = \frac{1}{1-\eta^2}$$

فریب بزرگنمایی

زمانی که η به سمت یک می رود این فریب بزرگنمایی
 بی نهایت میل می کند.

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + \hat{x}_p \sin \Omega t$$

$$\hat{x}_p = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1-\eta^2} = \frac{F_0}{k} \alpha(\eta)$$

جواب کلی معادله:

فرمانی در سیستم میرایی داشته
 باشیم جواب تحت چگن به
 سمت صفر میل می کند.

حساب ه قسم: ۲، ۲، ۹۱؛ شنبه

معادله دفرانسیل حرکت در این صیفت بصورت زیر می آید: $m\ddot{x} + kx = F(t) = F_0 \sin \Omega t$

$$x_p(t) = \hat{x}_p \sin \Omega t, \quad \hat{x}_p = \frac{F_0}{k} \alpha(\eta), \quad \alpha(\eta) = \frac{1}{1-\eta^2}$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{f}{f_n}$$

فرکانس
فرکانس طبیعی

* در این η ضریب بزرگنمایی بی نهایت می شود و دافنه دنیا کمی را هم بی نهایت می کند (حال پدیده تشدید یا رزونانس می باشد)

بررسی تغییرات دافنه بلون این دو جمله به سمت بی نهایت می رود. (رسمی در فرانسوی جای ω بزرگ) لذا (توجه) را قرار می دهیم و پاسخ معادله ریاضی را بررسی می کنیم

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad ; \quad x_p(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_p(t) = -B_1 \omega^2 \sin \omega t - B_2 \omega^2 \cos \omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$-B_1 \omega^2 \sin \omega t - B_2 \omega^2 \cos \omega t + \omega^2 B_1 \sin \omega t + \omega^2 B_2 \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

می بینیم که از این رابطه نتیجه نمی گیریم و تمام ها با هم صاف می شوند. بنابراین باید x_p را بصورت ضریب می نویسیم:

$$x_p = B t \sin \omega t$$

ابتدا مشتق گیری می کنیم

$$\dot{x}_p = B \sin \omega t + B t \omega \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_p = B \omega \cos \omega t + B \omega \cos \omega t - B t \omega^2 \sin \omega t$$

$$\left(\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \right) \text{ حل معادله معادله فرانسوی را می دهیم:}$$

$$2B \omega \cos \omega t - B t \omega^2 \sin \omega t + \omega^2 B t \sin \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

در این معادله هم به نتیجه رسیدیم چون در یک طرف $\sin$ و در یک طرف $\cos$ داریم.

پس برای بهترین نتیجه برای حل معادله عبارت است از:

$$x_p(t) = B t \cos \omega t$$

$$\dot{x}_p(t) = B \cos \omega t - B t \omega \sin \omega t$$

$$\ddot{x}_p(t) = -B \omega \sin \omega t - B \omega \sin \omega t - B t \omega^2 \cos \omega t$$

$$-2B \omega \sin \omega t - B t \omega^2 \cos \omega t + \omega^2 B t \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$-2B \omega = \frac{F_0}{m} \Rightarrow$$

$$B = \frac{-F_0}{2m\omega}$$

$$x_p(t) = \frac{-F_0}{2m\omega} t \cos \omega t$$

معادله دیفرانسیل $\Leftarrow$

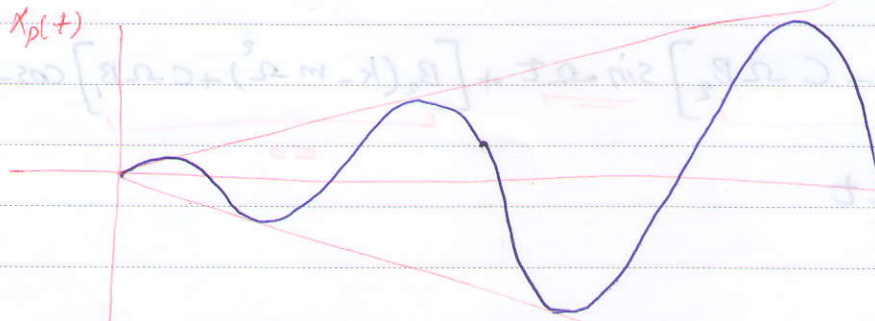
این معادله پاسخ سیستم برای حالتی است که $\omega = \omega_n$ باشد.

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega} t \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

معادله را به این شکل نیز می‌توان نوشت:

یعنی درست در حالت رزونانس یک زاویه فود درجه داریم.

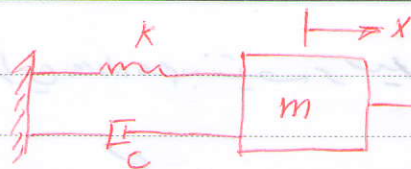
$x_p(t)$



دامنه در حالت رزونانس

به صورت خطی در طول

زمان افزایش می‌یابد.



ارتعاشات واداشته با میرایی:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$x_h(t) = A e^{-\rho \omega t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

پایه می‌دهد

پایه این معادله بعد از مدتی به سمت صفر میل می‌کند. به همین خاطر پایه می‌دهد و غیره (مورد اول است).

$$x_p(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t = B \sin(\omega t + \varphi)$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \quad ; \quad \tan \varphi = \frac{B_2}{B_1}$$

این از $x_p(t)$ مشتق می‌گیریم و در رابطه دیفرانسیل قرار می‌دهیم.

$$\dot{x}_p(t) = B_1 \omega \cos \omega t - B_2 \omega \sin \omega t$$

$$\ddot{x}_p(t) = -B_1 \omega^2 \sin \omega t - B_2 \omega^2 \cos \omega t$$

$$-m B_1 \omega^2 \sin \omega t - m B_2 \omega^2 \cos \omega t + c B_1 \omega \cos \omega t -$$

$$c B_2 \omega \sin \omega t + B_1 k \sin \omega t + B_2 k \cos \omega t = F_0 \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} & \left[B_1 (k - m \omega^2) - c \omega B_2 \right] \sin \omega t + \left[B_2 (k - m \omega^2) + c \omega B_1 \right] \cos \omega t \\ & = F_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

$$B_1(k - m\omega^2) - c\omega B_2 = F_0 \quad (1)$$

$$B_2(k - m\omega^2) + c\omega B_1 = 0 \quad (2) \quad B_2 = \frac{-c\omega}{k - m\omega^2} B_1$$

$$\text{in (1)} \Rightarrow B_1 \left[(k - m\omega^2) + \frac{c^2\omega^2}{k - m\omega^2} \right] = F_0$$

$$B_1 = \frac{(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} F_0, \quad B_2 = \frac{-c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} F_0$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} =$$

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}, \quad \text{tg } \delta = \frac{-c\omega}{k - m\omega^2}$$

پس اگر پاسخ غیر همگن به صورت $X_p(t) = B \sin(\omega t - \delta)$ داشته شود
 می توان δ را به صورت زیر نوشت:

$$\delta = \arctan \text{tg } \frac{c\omega}{k - m\omega^2}, \quad \text{tg } \delta = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

پایه سیستم به نیروی محرک عبارت است از: $\hat{x}_p = \text{داده سیستم}$

$$X_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \sin(\omega t - \delta)$$

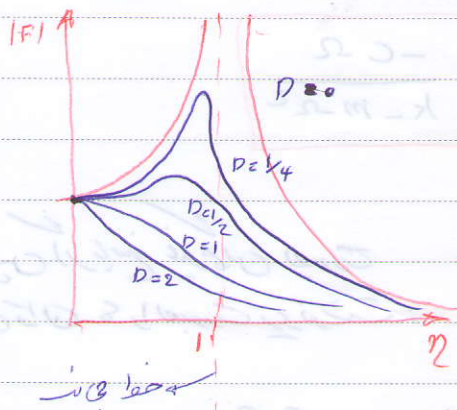
$$\hat{x}_p = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{\Omega}{\omega})^2)^2 + (\frac{c\Omega}{k})^2}}$$

$$\frac{c}{k} \Omega = \frac{2mD\omega}{m\omega^2} \Omega = 2D \frac{\Omega}{\omega} = 2D\eta$$

$$\hat{x}_p(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} = \frac{F_0}{k} \alpha(D, \eta)$$

ضریب بزرگنمایی

فرکانس در سیستم میرایی داریم در ضریب بزرگنمایی، نسبت میرایی واردی شود و دامنه نوسان تابع از نسبت میرایی و نسبت فرکانس ها است. در شرایط $D=0$ شود یعنی میرایی نداریم. هر قدر میرایی افزایش یابد یعنی D بزرگ شود، دامنه یابش می آید. و هر چه میرایی افزایش یابد، قله نمودار را، خط جانب فاصله می گیرد.



$$\alpha(D, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

$f(D, \eta)$

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = 2(-2\eta)(1 - \eta^2) + 8D^2\eta$$

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = -4\eta(1 - \eta^2 - 2D) = 0$$

برای اینکه بتوانیم قله نمودار را بیابیم
مشتق می گیریم و برای صفر قرار می دهیم.

$$1 - \eta^2 - 2D^2 = 0 \Rightarrow \eta^2 = 1 - 2D^2$$

$$\eta = \sqrt{1 - 2D^2}$$

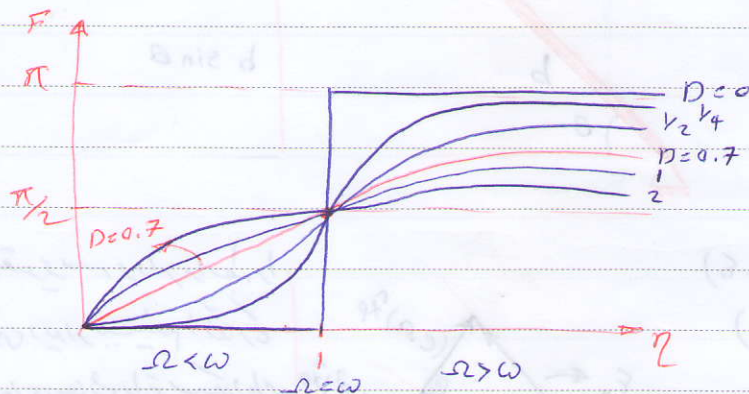
جایی که قله نمودار است. η برابر است با $\Leftarrow$

(61)

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\tan \delta = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{c}{k} \frac{\omega}{1 - \eta^2} = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}$$



در $(D=0.7)$ در محدوده
اول نمودار خطی است که یک
خط خاص است.

در $(\eta=1)$ بهینه زیناس
داریم



$F(t) = F_0 \sin \omega t$ یک نیروی متناوب داریم سیستم
داریم.

$$F(t) = F_0 \sin \omega t \quad \text{پاسخ سیستم} \quad x_p(t) = \hat{x}_p \sin(\omega t - \delta)$$

$$\hat{x}_p = \frac{F_0}{k} \alpha(D, \eta), \quad \alpha(D, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} \right)^{1/2} \rightarrow \text{سیستم}$$

$$\tan \delta = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

روش ترسیمی:

$$x = \hat{x}_p \sin(\omega t - \delta) \quad x \text{ in } * \Rightarrow$$

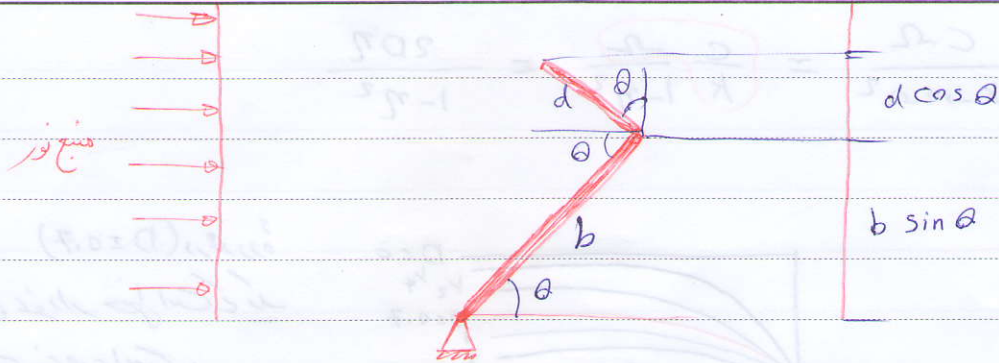
$$-m\omega^2 \hat{x}_p \sin(\omega t - \delta) + c\omega \hat{x}_p \cos(\omega t - \delta) +$$

$$+ k \hat{x}_p \sin(\omega t - \delta) = F_0 \sin \omega t$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ()



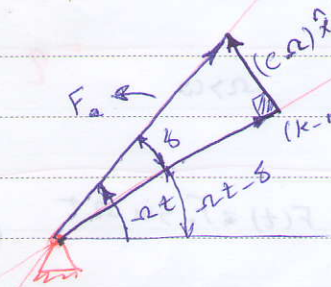
$$(k - m\omega^2) \hat{x}_p \sin(\omega t - \delta) + c\omega \hat{x}_p \cos(\omega t - \delta) = F_0 \sin \omega t$$

$$\tan \delta = \frac{c\omega \hat{x}_p}{(k - m\omega^2) \hat{x}_p}$$

$$\tan \delta = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

$$F_0^2 = (k - m\omega^2)^2 \hat{x}_p^2 + c^2 \omega^2 \hat{x}_p^2$$

$$\hat{x}_p = \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2} \quad ; \quad \hat{x}_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}}$$



اگر تصویر سه بردار را بر روی دیوار بکشیم آنوقت فرم های معادلات رسم می شود.

در حالت کلی سه عبارت داریم که Sin ها را به هم جمع کردیم و تبدیل به دو عبارت کردیم (در حالت کلی ساده). اولی که تصویر آن بر روی دیوار قائم با فاصله زاویه باشد. زاویه ی مورد نیاز زنی (ωt) است و ثانی $(\omega t - \delta)$ تصویر مربوط به Sin زاویه $(\omega t - \delta)$ رسم می کنیم که $(k - m\omega^2)$ است. بردار Cos باید بر روی Sin عمود باشد که $(c\omega)$ را عمود بر $(k - m\omega^2)$ رسم می کنیم و از این طریق و بر روش رسم می کنیم جواب های که در مراحل قبل از طریق روابط ریاضی به آله رسیدیم به وجود می رسد.



فندی دارم کے صد دوسرا کے
حرکت میں تہہ . باہر اور غصہ
کرانے یہو کا سٹونے فندی دھت
کرد .

در این حالت نیروی در قعر نیست. $F_x = 0$ if $x_1 = x_2$

در این حالت فاصله از پیش طول بیشتری
نسبت به کمانش طول دارد.

اگر $x_1 < x_2$

$k(x_2 - x_1) \rightarrow$ مقدار نیرو

نکته: چه قدر افسوسه کنیم و یا کشتن بوجود آوریم در نتیجه ی رلاست تا تیری ندارد نوری اثری که بر روی جسم می افتد از بی است.



F_0 (زیادہ K ، جی بی جی میں زیادہ)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ku = \overbrace{ku_0}^{F_0} \sin \omega t = F_0 \sin \omega t$$

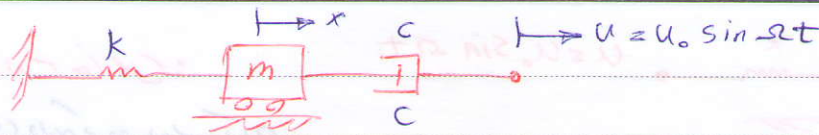
$$\hat{x}_p = \frac{F_0}{k} \alpha(D, \eta) = \frac{k u_0}{k} \alpha(D, \eta) = u_0 \alpha(D, \eta)$$

حالت کی مثالیں اس میں دی گئی ہیں

$$m_{eq} \ddot{x} + C_{eq} \dot{x} + K_{eq} x = F_{o,eq} \sin \omega t$$

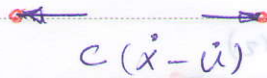
Subject:

Year. Month. Date. ()

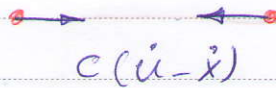


حالت دیگر:

if $\dot{x} > \dot{u}$



if $\dot{x} < \dot{u}$



$$m\ddot{x} = -kx - c(\dot{x} - \dot{u})$$



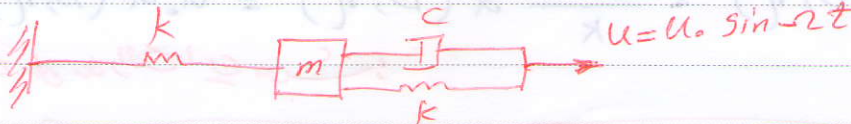
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}$$

بین $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ وجود ندارد و روابط تغییر نمی کنند

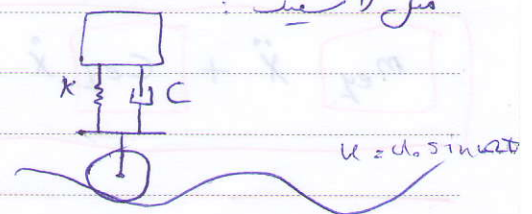
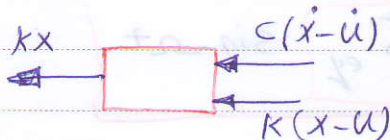
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \underbrace{F_{eq}}_{c\omega u_0 \cos \omega t}$$

$$\hat{x}_p = \frac{F_{eq}}{k_{eq}} \alpha(p, \eta) = \frac{c\omega u_0}{k} \alpha(p, \eta)$$

$$\hat{x}_p = \frac{2D\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} u_0$$



حالت دیگر:



PAPCO

$$m \ddot{x} = -kx - k(x-u) - c(\dot{x}-\dot{u})$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + 2kx = ku + c\dot{u} = \underbrace{ku}_{B_1} \sin \Omega t + \underbrace{c u_0 \Omega}_{B_2} \cos \Omega t$$

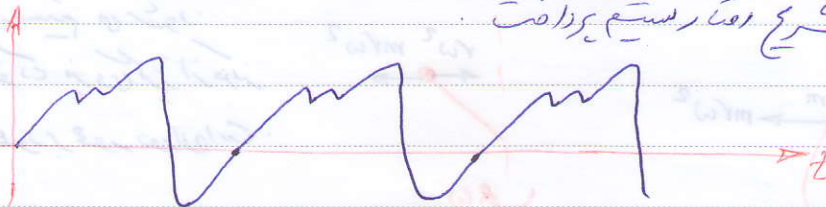
$$m \ddot{x} + c \dot{x} + 2kx = B \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + 2kx = \underbrace{u_0 \sqrt{(k)^2 + (c^2 \Omega^2)}}_{F_{eq}} \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\hat{x}_p = \frac{F_{eq}}{k_{eq}} \alpha(D, \eta) = \frac{u_0 \sqrt{k^2 + c^2 \Omega^2}}{2k \sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}}$$

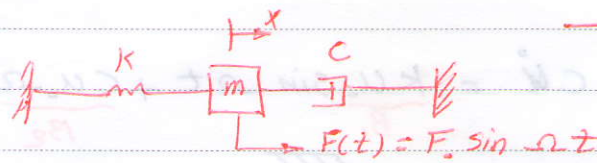
$$\hat{x}_p = \frac{u_0}{2k} \frac{k \sqrt{1+4D^2 \eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}} = \frac{u_0}{2} \sqrt{\frac{1+4D^2 \eta^2}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}}$$

نیروی $F_0 \sin \Omega t$ یک نیروی ایده‌آلی است که در عمل به‌راستم پیش می‌آید. یک سیستم بتواند طبق این نیرو رفتار کند اما به دلیل این‌که این نیروها رفتاری $\sin$ و $\cos$ ندارند برای این‌که رفتار نیرو را بتوانیم شبیه کنیم ما فرض می‌کنیم که غدار در زمانی مشخص تکرار شود. در این صورت با استفاده از نیروهای غوری می‌توان به‌شکل رفتاری سیستم پرداخت.



به پدیده‌ای که در عمل اتفاق می‌افتد را بررسی می‌کنیم: (۱) تغییراتی صوری - (۲) اینرولاسیون (جدا سازی) (جدا سازی ارتعاش) - (۳) وسیله اندازه‌گیری ارتعاش

حساب حتم : ۹، ۲، ۹ : عین



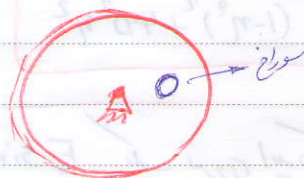
$$x_h(t) = A e^{-D\omega t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

$$x_p(t) = \hat{x}_p \sin(\Omega t - \delta) \quad \hat{x}_p = \frac{F_0}{K} \alpha(D, \eta), \quad \alpha$$

$$\alpha(D, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

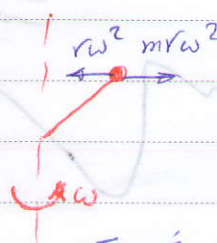
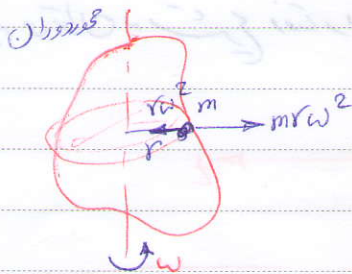
ضریب ارتعاشی

* **نا میزانی جسمی :** اگر یک جسم در حال دوران را در نظر بگیریم حول یک محور ثابت اگر جسم آن حول محور دوران کاملاً متقارن باشد توکم ای جسم نامیزانی صری ندارد. در غیر این صورت جسم دارای نامیزانی صری می باشد.



اگر یک دیسک را حول مرکز خود می
دوران می دهیم در نظر بگیریم در صورتی که
یک خط در دیسک را بداریم یعنی نامیزانی
وجود کرده ایم.

این نامیزانی جرمی در سرعت های بسیار بالا اثرات زیادی دارد و نیروی گریز از مرکز باعث



لرزش در سیستم می شود
دقت شو که نیروی گریز از مرکز
همیشه عمود بر محور دوران است.

* هر جسم در حال دوران حول یک محور ثابت

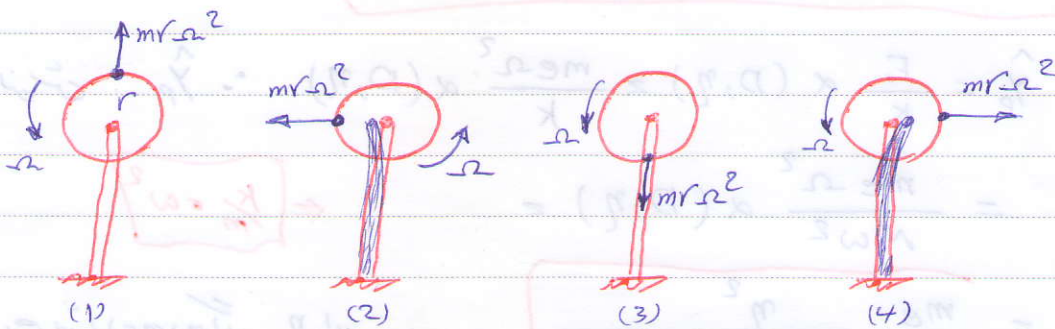
تحت تأثیر نیروی گریز از مرکز می باشد که باعث آن عمود بر محور دوران بوده و سبب نیروی گریز
جسم از محور دوران دارد.

(67)

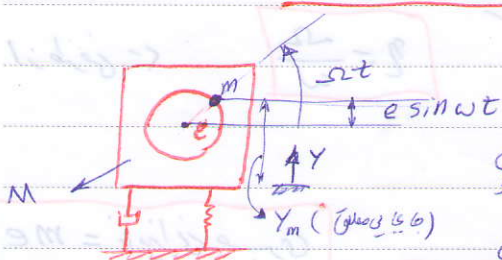
Subject:

Year. Month. Date. ()

آیا ناهمبازی جبری باعث نوسان می شود؟ بله یک دسک را که روی تکیه قرار دارد در نظر می گیریم.



یک جسم را روی محیط دسک در نظر می گیریم و اثر آن را بررسی می کنیم. می بینیم که در حالت های (2) و (4) و (1) و (3) بدین احوال نیروی خاصی اثر آن بصورت نوسان در سیستم ظاهر نمی شود. در حالتی که در (1) و (3) فقط نیروی کششگاه اثر می گذارد. بنابراین می توانیم بگوییم که ناهمبازی جبری می تواند در سیستم نوسان ایجاد کند. درگاه ها و حالت اثر ناهمبازی جبری بصورت تولید صداهم خواص بعد (عن را به)



موشن براون برای یک مدل: این مدل روی یک

بالشتک که هم خاصیت پراکندگی دارد و هم خاصیت

الاستیسی، (این مدل یک بایستی می باشد روی یک فونداسیون)

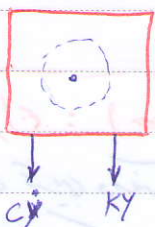
با خاصیت های ذکر شده قرار دارد. نوسان خاصیت ناهمبازی

جبری در بایستی بطور مشخص وجود دارد و برای همیشه در هر حالت ناهمبازی جبری داریم.

جسم روی محیط در حال دوران است، جسم کل مجموعه که روی بالشتک قرار دارد $M =$

با سرعت زاویه ای ثابت Ω

دیگرام اگر لا سیستم



$$(M-m)\ddot{y} + m\ddot{y}_m = -ky - c\dot{y}$$

$$y_m = y + e \sin \Omega t \quad \& \quad \ddot{y}_m = \ddot{y} - e \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$(M-m)\ddot{y} + m(\ddot{y} - e \Omega^2 \sin \Omega t) + c\dot{y} + ky = 0$$

PAPCO

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = me\omega^2 \sin \omega t$$

مدل ارتعاشی

$$\hat{y}_p = \frac{F_0}{k} \alpha(D, \eta) = \frac{me\omega^2}{k} \alpha(D, \eta) \quad \hat{y}_p \text{ دامنهٔ نوسان}$$

$$= \frac{me\omega^2}{m\omega^2} \alpha(D, \eta) =$$

$$\leftarrow \frac{k}{m} = \omega^2$$

$$= \frac{me}{m} \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

این عبارت نشان می‌دهد که η رابطه
مستقیماً با نسبت میرم برابر 1 می‌شود.

$$\left. \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \right|_{\eta \rightarrow \infty} = 1 = \left. \frac{\eta^2}{\eta^2 \sqrt{(\frac{1}{\eta^2} - 1)^2 + \frac{4D^2}{\eta^2}}} \right|_{\eta \rightarrow \infty} = \frac{1}{1}$$

اگرچه این عبارت برای $\eta = 1$ می‌شود یعنی تأثیری در سیستم نمی‌گذارد.
و تنها چیزی که باقی می‌ماند:

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

از طرفی $\omega_n =$

$$\text{if } \eta \rightarrow \infty \Rightarrow$$

$$\hat{y}_p = \frac{me}{m}$$

$$me = \text{نامیزانی جبری}$$

هم خود جرم و نامیزانی بوجود آورد مهم است
و هم فاصله جرم تا محور مهم است.

که دامنهٔ دینامیکی ارتعاشات؛
از این رابطه تبعاً می‌گیریم که اگر هر چه وزن به‌نسبت به استیوی
رازیاد کنیم دامنهٔ ارتعاشات کم می‌شود. و اگر فاصله جرم
مورد نظر زیاد شود دامنهٔ ارتعاشات بیشتر می‌شود.

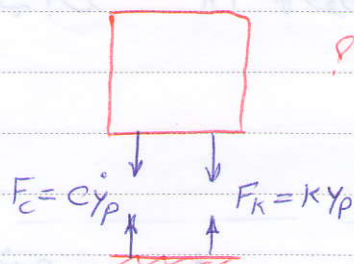
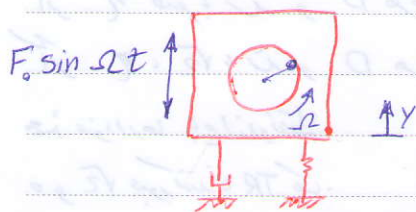
*** اینرولاسیون: (جدا سازی ارتعاشات)** می‌خواهیم بدست‌دهیم تا ارتعاشات را کنترل
کنیم تا ارتعاشات مخرب و مضر آن در مکان ما نشیند و دو گونه است: * فعال * غیر فعال
مثلاً صوت را توپیل می‌کند و ما می‌توانیم برای تولید ارتعاشات با بکون این را انجام داده تا ارتعاشات را کم کنیم. در این
حالت ما توپیل می‌کنیم و صوت را اینرولاسیون کرده اند. از نوع فعال است.
ولی در بسیاری از موارد نوسان محیط اطراف بر روی جسم اثر می‌گذارد و جسم باید بدون ارتعاش باشد.

به کندی کردن ارتعاشات محیط برای جلوگیری از اثرگذاری بر روی جسم به اصطلاح ایزوله کردن میگویند.

ایزولاسیون فعال: برای کاهش انتقال لرزش‌های یک سیستم نوسانی به محیط اطراف انجام می‌شود.

ایزولاسیون غیرفعال: برای کاهش انتقال لرزش‌های محیط اطراف روی یک سیستم دینامیکی انجام می‌شود.

مدل‌های مطرح شده در هر دو حالت مشابهت‌هایی دارند. شکل یک مدل انتقالی می‌بینیم:



نیروی مشتق‌شده از زمین چیست؟

یک ترمیم از لرزه را می‌بینیم:

کل نیروهای مشتق‌شده از زمین:

$$F_d = F_c + F_k$$

$$F_d = c \dot{y}_p + k y_p =$$

$$= c \hat{y}_p \omega \cos(\omega t - \delta) + k \hat{y}_p \sin(\omega t - \delta)$$

$$= B \sin(\omega t - \delta + \varphi)$$

$$F_d = \hat{y}_p \sqrt{k^2 + c^2 \omega^2} \sin(\omega t - \delta + \varphi)$$

$\hat{F}_d =$ ماکزیمم نیروی مشتق‌شده از زمین

$$\tan \varphi = \frac{B_2}{B_1}$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

$$\hat{F}_d = \hat{y}_p \sqrt{k^2 + c^2 \omega^2} = \frac{F_0}{k} \alpha(D, \eta) \sqrt{k^2 + c^2 \omega^2} =$$

$$= \frac{F_0}{k} \alpha(D, \eta) k \sqrt{1 + 4D^2 \eta^2}$$

$$\hat{F}_d = F_0 \frac{\sqrt{1 + 4D^2 \eta^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}}$$

$$\hat{F}_d = F_0 \sqrt{\frac{1 + 4D^2 \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}} \quad TR$$

$$\hat{F}_d = TR \cdot F_0 \Leftrightarrow 0 < TR \leq 1$$

TR همواره باید کوچکتر از یک باشد. فرض انتقال: به عبارت TR فرض انتقال کنید

if $TR = 1$ then $\Rightarrow 1 + 4D^2\eta^2 = (1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2$

زهی TR برابر 1 باشد D دیگر رفتی ندارد.

$$(1 - \eta^2)^2 = 1$$

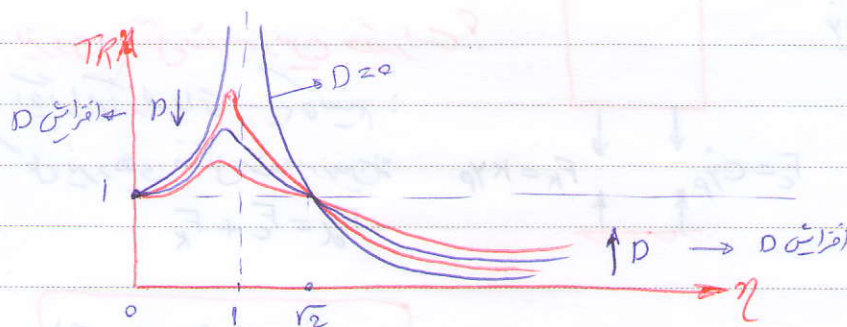
$$1 - \eta^2 = \pm 1$$

$$\eta_1 = 0$$

$$\eta_2 = \sqrt{2}$$

اگر η صفر باشد و D هر چه باشد TR می شود 1

اگر $\eta = \sqrt{2}$ باشد و D هر چه باشد TR می شود 1



همه نمودارها باید از دو نقطه 0 و $\sqrt{2}$ عبور کنند تا TR می شود 1

همانطور که تقسیم TR همواره باید کوچکتر از یک باشد و با توجه به نمودار

هر چه η بزرگتر از $\sqrt{2}$ باشد TR کوچکتر از یک می شود

$$\eta > \sqrt{2}$$

شرط اول: برای اینرولا سیول

شرط دوم: باید میرایی تا حد کمای کوچک باشد. (این شرط خلاف تقوای وی در عمل درست است) برای کوچک کردن میرایی باید به پیرید هان چون برزوماس هم توجه داشت

حالت دوم: (اینرولا سیول غیر فعال)



$\uparrow y$

$$u = u_0 \sin \Omega t$$

(زمین، نوک را ثابت باشد)

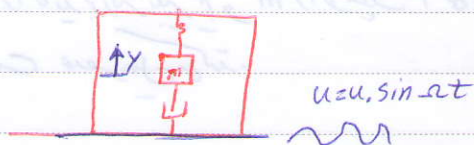
$$y = u_0 TR = u_0 \sqrt{\frac{1 + 4D^2\eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

$$0 < y < u_0$$

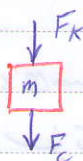
$$0 < TR < 1$$

با توجه به خنثی انتقال که مثلاً به خنثی انتقال در این سیستم فعال می‌باشد می‌توان گفت که شرایط این سیستم فعال با شرایط این سیستم غیر فعال یکی باشد. برای هر سیستم که این سیستم خود در این حالت این سیستم هم می‌شود.

روش حل اندازه گیری ارتعاشات: وسیله ای که توانا اندازه گیری کند خود وسیله یک سیستم نوسانی



است. این سیستم یک محفظه است که در داخل آن یک جرم بر روی فنر و یک میرا کننده به محفظه متصل است. خود محفظه هم بر روی سیستم ارتعاشی متصل می‌شود که در این صورت خود محفظه و جرم داخل آن هم مرتعش می‌شوند. لرزش جرم را نسبت به خود محفظه اندازه گیری کنیم.



$$m\ddot{y}_m = -F_c - F_k$$

$$= -c\dot{y} - ky$$

y_m جابجایی مطلق جرم m است $y_m = u + y$

نسبت را اندازه گیری می‌کنیم جرم نسبت به محفظه مدار است.

$$m\ddot{y}_m + m\ddot{u} + c\dot{y} + ky = 0$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{u}$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

شماره جرم
دامنه شماره

$$\hat{y}_p = \frac{F_0}{K} \alpha(D, \eta) = \frac{m u_0 \omega^2}{K} \alpha(D, \eta)$$

$$\hat{y}_p = \frac{m u_0 \omega^2}{m \omega^2} \alpha(D, \eta)$$

$$u_0 \omega^2 = \omega^2 \hat{y}_p \frac{1}{\alpha(D, \eta)}$$

با قایل اندازه گیری است. زیرا k و m داریم. $\hat{y}_p$ را هم داریم. دامنه ارتعاش. محمول این

رابطه $\frac{1}{\alpha(D, \eta)}$ است که باید کاری کنیم معلوم شود.

$$\frac{1}{\alpha(D, \eta)} = \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}$$

کار کاری کنیم که η به علت صفر بودن عبارت برای η می‌شود.

$$\eta \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha(D, \eta)} = 1 \Rightarrow u_0 \omega^2 = \ddot{u}_{\max} = \omega^2 \hat{y}_p$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

حرکت

برای اینکه η را به علت تغییر ω یا تغییر D تغییر دهیم، بنابراین ω را تغییر دهیم.

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

که باید بزرگتر از ω_n و m را کوچک آنگاه η به سمت صفر میل می‌کند.

$$\ddot{u}_{\max} = u_0 \omega^2 = \omega^2 \hat{y}_p \quad (\text{نسبت به حقیقت})$$

بنابراین ω و $\hat{y}_p$ با هم توانیم ثابت جبرابیت کنیم. بنابراین حقیقت نسبت به ω تغییر می‌کند.

$$\hat{y}_p = \frac{u_0 \omega^2}{\omega^2 \eta^2} \alpha(D, \eta)$$

$$u = u_0 \sin \omega t$$

دامنه نوسان

زغزغ سیغ:

$$\hat{y}_p = u_0 \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \quad \eta \rightarrow \infty$$

m باید بزرگ باشد و k باید

$$\eta \rightarrow \infty \quad \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{m}{k}}} \rightarrow \infty$$

بنابراین ω باید بزرگتر شود.

$$\Rightarrow \hat{y}_p = u_0$$

دامنه نوسان

برای ω بسیار بزرگتر از ω_n و m بسیار کوچکتر از k است.

و چون دامنه نوسان u_0 را دارد بزرگ باشد باید حقیقت را بزرگ گرفت.

(73)

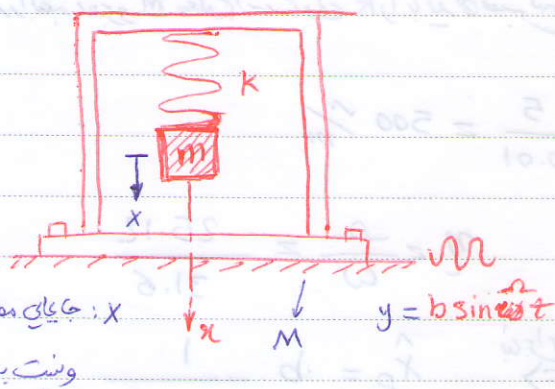
Subject:

Year:

Month:

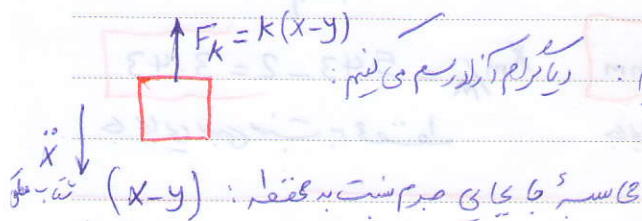
Date: ()

جلسه نهم: ۱۴، ۲، ۹۱؛ شب



مثله ۴-۴ - جرم (0.5 Kg) به انتهای یک فنر ظرفیت متصل شده است. هرگاه نیروی استاتیکی (5 N) به جرم اعمال شود فنر به اندازه (10 mm) جابجایی شود. اگر به قاب مربوط یک حرکت هماهنگ قائم با فرکانس (4 Hz) و دامنه (2 mm) داده شود. دامنه x مربوط به ارتعاش قائم جرم را بیابید: $x = 5.43 \text{ mm}$ (ج)

ابتدا باید معادله حرکت موجود برای m را بیابیم. اگر جرم نسبت به نقطه نوسان نداشته باشد فنر به هیچ وجه تغییر شکل پیدا نمی کند و میزان تغییر کل فنر به اندازه ای است که جرم نسبت به نقطه نوسان (جابجایی) می کند.



$$x_{m/M} = x_m - x_M = x - y$$

$$m\ddot{x} = -F_k = -k(x-y) \Rightarrow m\ddot{x} + kx = ky = \frac{k b \sin \Omega t}{F_0}$$

$$\hat{x}_p = \frac{F_0}{k} \alpha(\eta) = \frac{k b}{k} \alpha(\eta) = b \alpha(\eta)$$

$$\alpha(D, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \Big|_{D=0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2}}$$

$$= \left| \frac{1}{1-\eta^2} \right| = \begin{cases} \frac{1}{1-\eta^2} & \eta < 1 \\ \frac{1}{\eta^2-1} & \eta > 1 \end{cases}$$

PAPCO

$$f = 4 \text{ Hz} \rightarrow \Omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi = 25.12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

در رابطه ی m معلوم است دی کارا باید حساب کنیم:

$$F = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{5}{0.01} = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{500}{0.5}} = 31.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{25.12}{31.6}$$

$$\eta = 0.79, \quad \eta < 1 \Rightarrow \hat{x}_p = b \frac{1}{1 - \eta^2}$$

$$\hat{x}_p = 2 \frac{1}{1 - (0.79)^2} = 5.43 \text{ mm}$$

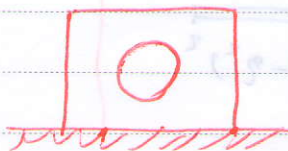
جابجایی مطلق جسم

$$x_{m/m} = 5.43 - 2 = 3.43$$

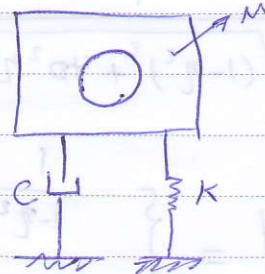
جابجایی نسبی نسبت به محفظه

مثال: یک موتور برقی به جرم (350 kg) که حرکت یک گیرشور هواست، در شرایط (800) کورس قدرت در دقیقه کار می کند. هنگامی که موتور بر روی بالشتکهای لاستیکی نصب می شود، ارتعاش انتقال یافته به یک یارم مقدار بدون بالشتک لاستیکی تقلیل می یابد. مقدار حیز استاتیکی بالشتکهای لاستیکی چند بوده است؟ (ج) 7 mm

(اگر این موتور بر روی یک سکوی سیمانی به جرم (350 kg) نصب شود، کاهش به نوبت خود بر روی بالشتکهای یاد شده نصب شده باشد در صد کاهش حیز دینامیکی چقدر است؟ (ج) کاهش 55.6%



د



$$\Omega = 800 \text{ rpm}$$

$$TR = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$m = 350 \text{ kg}$$

موتور هر نوعی که داشته باشد به بالشتک انتقال می دهد.

$$TR = \sqrt{\frac{1 + 4D^2\eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

TR در زمانی که میرایی داشته باشیم برابر است با:

$$TR|_{D \rightarrow 0} = \left| \frac{1}{1 - \eta^2} \right| \xrightarrow{\eta > 1}$$

$$TR = \frac{1}{\eta^2 - 1}$$

TR در زمانی که میرایی نداشته باشیم:

TR زمانی که برای $\sqrt{2}$ بود بازه زیر (1) می آید و با داشتن TR برای 4 باید بگوئیم η باید بزرگتر از 1 باشد. با داشتن TR، عدد η را می بینیم.

$$Mg = k y_{st}$$

خیز استاتیکی: با قرار دادن موتور بر روی بالشتک، بالشتک

تغییر شکل می دهد. برای تغییر شکل حاصل از نیروی وزن

$$y_{st} = \frac{Mg}{k}$$

ماشین است خیز استاتیکی گوئیم.

در رابطه دایره و k محمول است. Mg معلوم است. از طرفی

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \Rightarrow k = M\omega^2$$

با داشتن ω که از محمول بودن η و ω بدست می آید می

می بینیم.

$$y_{st} = \frac{Mg}{M\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{y_{st}} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}}}$$

بنابراین با داشتن خیز استاتیکی می توان ω را می بینیم.

$$y_{st} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{g \cdot \eta^2}{\omega^2}$$

$\Rightarrow$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ و } TR = \frac{1}{4} = \frac{1}{\eta^2 - 1}$$

$$\eta^2 - 1 = 4 \Rightarrow \eta = \sqrt{5}$$

$$y_{st} = \frac{9.81 \times 5}{(83.7)^2} = 7 \text{ mm}$$

خیز استاتیکی

$$\omega = 800 \frac{\pi}{30} = \frac{80\pi}{3} = 83.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

بعبارتی مقدار کانی که بالشتک پیدا می کند برابر 7 mm باشد.

(ب) با اضافه شدن کروی بیخانی واقتضای جسم بر روی با شنگ میزان لرزش کم می شود.
ابتدا دامن دنیا مکی را برای تحت این سیستم می بینیم:

$$\hat{Y}_{P_1} = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\eta_1^2 - 1} \quad \text{دامنه در حالت اول} \quad \text{از حالت اول به دوم } F_0 \text{ و } K \text{ بدون تغییر می مانند و فقط } \eta \text{ تغییر می کند}$$

$$\hat{Y}_{P_2} = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\eta_2^2 - 1} \quad \text{دامنه در حالت دوم} \quad \text{حال برای سیستم در صد کاهش دامنه می نویسیم:}$$

$$\frac{\hat{Y}_{P_1} - \hat{Y}_{P_2}}{\hat{Y}_{P_1}} \times 100 = \text{درصد کاهش دامنه} = \left(1 - \frac{\hat{Y}_{P_2}}{\hat{Y}_{P_1}}\right) 100 = \text{درصد کاهش}$$

$$\frac{\hat{Y}_{P_2}}{\hat{Y}_{P_1}} = \frac{\eta_1^2 - 1}{\eta_2^2 - 1} \rightarrow \frac{5 - 1}{10 - 1} = \frac{4}{9}$$

$$\eta_1 = \sqrt{5} \\ \eta_1 = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\omega}{\sqrt{K/m_1}}$$

$$\eta_2 = \frac{\omega}{\omega_2} = \frac{\omega}{\sqrt{K/m_2}} \quad [m_2 = 2m_1]$$

$$\eta_2 = \frac{\omega}{\sqrt{K/2m_1}} = \sqrt{2} \frac{\omega}{\sqrt{K/m_1}} = \sqrt{2} \eta_1$$

$$\text{میزان کاهش دامنه بواسطه سنگین تر کردن جسم} = 100(1 - \frac{4}{9}) = 55.6\%$$

مثلاً: اگر از یک ارتعاش سنگ برای تعیین دامنه های ارتعاش در فرکانس های خیلی بالا و از فرکانس طبیعی خودشان استفاده شود، نسبت میراچ D بهینه سیستم برای بهترین حالت چقدر است؟ (ج) $D = 0.707$

$$\frac{\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} = 1 \quad \eta^2 = \frac{1}{2-4D^2} \quad \eta \rightarrow \infty \Rightarrow D \text{ بهینه باشد}$$

$$D = \sqrt{0.5} = 0.707$$

مسئله: یک موتور الکتریکی بعنوان یک محرک مکانیکی بکار رفته و بر روی مرکز یک میز یک نصب شده است. وزن موتور با تقسیم وزن موتور میز (40 kg) می باشد. همچنین گردنده و سایر اجزای آن دارای صدم (10 kg) و خروج از مرکز (15 mm) هستند. نصب موتور، میز میز، برابر (3 mm) است. در ارتفاعات آزاد جابجایی (32 mm) در خلال (1 s) به مقدار (1 mm) میرایی شود. سرعت عملکرد موتور برابر (875 rpm) است. اگر میرایی لزج فرض شود، دامنه حرکتی را حد کنید؟ (ج 6.10 mm)

$$\hat{y}_p (\text{دامنه}) = \frac{F_0}{k} \alpha(D, \eta) = \frac{m e}{M} \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}}$$

$$m = 10 \text{ kg} ; e = 15 \text{ mm} = 0.015 \text{ m} ; M = 40 \text{ kg} ;$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}} = \sqrt{\frac{9.81}{0.003}} = 57.15 \text{ rad/s}$$

$$\eta = \frac{875 \times \pi}{57.15 \times 30} = 1.6$$

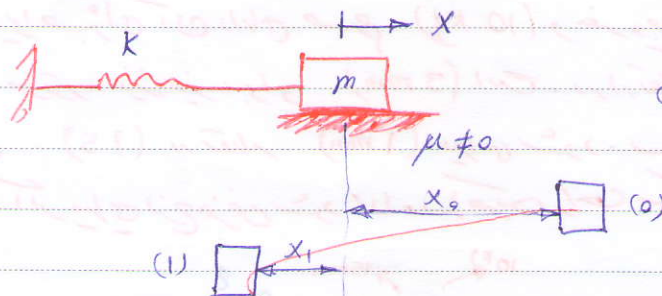
$$y_0 = 32 \text{ mm}$$

$$y_n = 1 \text{ mm}$$

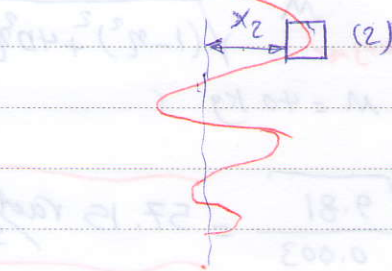
$$\ln \frac{\alpha_0}{\alpha_n} = \frac{2\pi n D}{\sqrt{1-D^2}} = \omega D t \quad D = \frac{\ln 32}{\omega t}$$

$$D = \frac{\ln 32}{57.15 \times 1} = 0.06$$

اثر اصطکاک کولمب (خشک): ما اینجا اصطکاک را اصلاً در نظر نمی‌گیریم. اگر این اثر را در نظر بگیریم می‌توانیم ثابت کنیم اثرات اصطکاک را مورد بررسی قرار دهیم.



$$W'_{0-1} = E_1 - E_0$$



انرژی جنبشی در نقطه‌های (۰) و (۱) برابر صفر است. سرعت صفر می‌شود و بی‌انرژی می‌ماند.

$$W'_{0-1} = -R(x_0 + x_1)$$

$$E_1 = \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$-R(x_0 + x_1) = \frac{1}{2} k (x_1^2 - x_0^2) = \frac{1}{2} k (x_1 - x_0)(x_1 + x_0)$$

$$x_1 - x_0 = \frac{-2R}{k}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{2R}{k}$$

میزان دامنه بعد از نیم‌پریود

$$W'_{1-2} = E_2 - E_1$$

$$-R(x_1 + x_2) = \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$-R(x_1 + x_2) = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{-2R}{k}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{2R}{k} = x_0 - \frac{4R}{k}$$

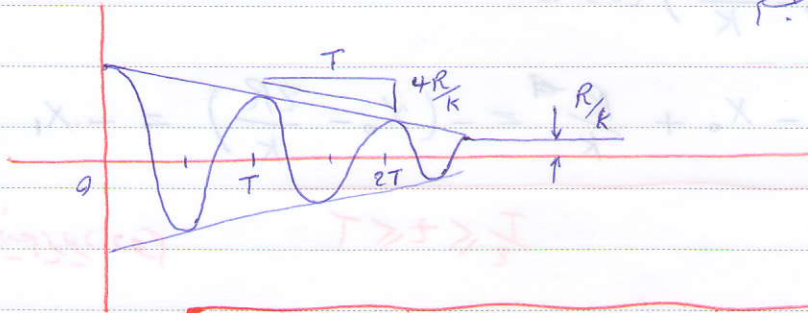
در پایان یک‌پریود به میزان $\frac{4R}{k}$ از دامنه کاسته می‌شود.

(79)

Subject:

Year: Month: Date: ()

در زمانی که x برای R/k شود جسم
در حالت تعادل قرار می‌گیرد.

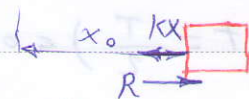


معادله حاکم بر حرکت: باید برای هر نیمه یک مورد معادله بنویسیم زیرا جهت اصطکاک در هر نیمه یکسره تغییر می‌کند.



$$0 \leq t \leq T/2$$

نیمه یکم در جهت راست
R چون در جهت راست



$$m\ddot{x} = -kx + R$$

$$m\ddot{x} + kx = R$$

است معادله یک نیمه
مکمل است.

$$x(t) = \frac{F_0}{k} + A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = \frac{R}{k} + A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$$

برای تعیین x باید جواب عمومی را توسط به شرایط اولیه به جواب خصوصی تبدیل کنیم:
 $x(t=0) = x_0$
 $\dot{x}(t=0) = 0$

$$x(t=0) = \frac{R}{k} + A_2 \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{x_0 - \frac{R}{k}}{1} = \frac{x_0 - \frac{R}{k}}{1}$$

$$\dot{x}(t) = A_1 \omega \cos \omega t - A_2 \omega \sin \omega t$$

$$\dot{x}(t=0) = A_1 \omega - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$A_1 = 0$$

$$x(t) = \frac{R}{k} - \frac{R}{k} \cos \omega t = \frac{R}{k} (1 - \cos \omega t)$$

$$x(t = \frac{T}{2}) = \frac{R}{k} (1 - \cos \omega t)$$

P4PCO

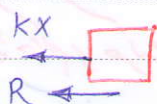
$$x(t) = \frac{R}{k} + \left(x_0 - \frac{R}{k}\right) \cos \omega t$$

$$x\left(t = \frac{T}{2}\right) = \frac{R}{k} - x_0 + \frac{R}{k} = -\left(x_0 - \frac{2R}{k}\right) = -x_1$$



$$\frac{T}{2} \leq t \leq T$$

نیست بر روی



$$m\ddot{x} + kx = -R$$

$$x(t) = \frac{-R}{k} + A_3 \sin \omega t + A_4 \cos \omega t$$

$$x\left(t = \frac{T}{2}\right) = -x_1, \quad \dot{x}\left(t = \frac{T}{2}\right) = 0$$

$$x\left(t = \frac{T}{2}\right) = -\frac{R}{k} - A_4 = -x_1 \Rightarrow A_4 = x_1 - \frac{R}{k}$$

$$\dot{x}(t) = A_3 \omega \cos \omega t - A_4 \omega \sin \omega t$$

$$\dot{x}\left(t = \frac{T}{2}\right) = 0$$

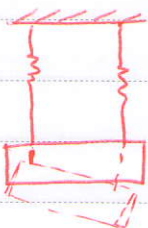
$$A_3 = 0$$

$$x(t) = \frac{-R}{k} + \left(x_1 - \frac{R}{k}\right) \cos \omega t$$

$$x(t = T) = x_1 - \frac{2R}{k} = x_0 - \frac{4R}{k}$$

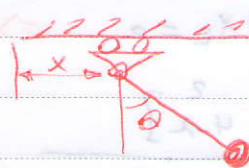
حجم ۲، ۲۳، ۲۹، ۳۰

ارتعاشات دوجرم آزاد: یک جسم صلب رقیقی می تواند دارای ۲ درجه آزادی باشد که با توجه به



قید و بند های وانداین درجته کمتر شود.
اگر جسم را در حالت تعادل در نظر بگیریم جسم هم انتقال کرده است و هم دورانه داشته است که نوشتیم سیستم دارای دوجرم آزاد است و بین این دو مرتبه هیچ ارتباطی وجود ندارد.

و یک جسم صلب در محیط جدا از درجه آزادی ای که می تواند داشته باشد ۳ است. اگر همین سیستم را در نظر بگیریم که در حالت های صاف و راست هم بتواند حرکت کند و یا این سیستم یک سیستم ذره دارای دوجرم آزاد است:



و یا نمونه ای از سیستم دارای دوجرم آزاد:



روش بررسی این نوع ارتعاشات:

برای ادامه بحث وارد مباحث ریاضی می شویم:

$$A \cdot X = Y$$

اگر یک ماتریس را در یک بردار ضرب کنیم جواب می یابیم که بردار دیگر شود.
حال می نویسیم اگر یک بردار را در یک ماتریس ضرب کنیم آیا می توانیم ضربی از خود ماتریس باشد؟ به ضرب λ = مقادیر ویژه گویند و به X = بردار ویژه گویند.

$$A \cdot X = \lambda X$$

مؤلفه های بردار X

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

م بردار صفر

$$A \cdot X = \lambda X \Rightarrow (A - \lambda) X = 0$$

چون بردارهای توانناز یک عدد کم شود باید λ را بصورت مائری واحد بنویسیم:

$$\lambda X = \lambda E X$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda E) X = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}} \quad \& \quad x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}}$$

x_1 و x_2 میفرستند مگر اینکه خارج کسر صفر باشد در آن صورت خارج کسر را صفر می‌نویسند.

$$\det(A - \lambda E) \neq 0 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \end{cases}$$

برای صفر نبودن پاسخ ها باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 4-\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0} \quad \boxed{\lambda_2 = 5}$$

بافتن به این که دو λ به دست آوریم، دو ماتریس λ داریم و معبارتی برای ماتریس 2×2 (مستعار) ویژه و دو بردار ویژه هم داریم.

حال به سبب بردارهای ویژه باید برداریم:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow (1-\lambda)x_1 = -2x_2 \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{1-\lambda}{-2} = \frac{\lambda-1}{2}$$

$$\frac{x_2}{x_1} \Big|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{x_{21}}{x_{11}} = \frac{\lambda_1-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

نسبت بین x_1 و x_2 را می توان نوشت
ولی خود x_1 و x_2 را نمی توان می سنج کرد.

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = X_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

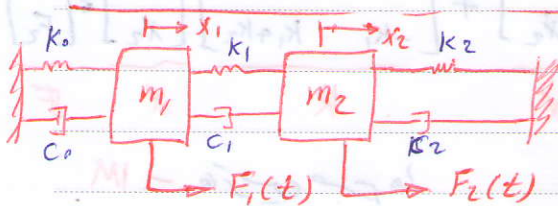
X_{11} مثل یک ضریب عمل می کند.

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

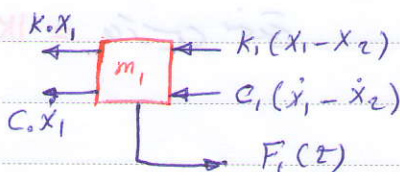
$$\frac{x_2}{x_1} \Big|_{\lambda=\lambda_2} = \frac{x_{22}}{x_{12}} = \frac{\lambda_2-1}{2} = 2$$

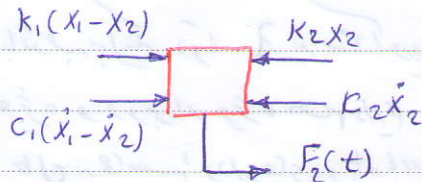
$$X_2 = X_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

به $C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بردارهای ویژه نوشت.



از رفتار شتاب (دوره به زمانی) یک سیستم داریم
گاهی موارد از میرا استی، الاستیسی و نیروی محرک را در نظر
می گیریم: برای این سیستم می توانیم به تا شرایط اولیه
داشته باشیم و باید دید که سیستم چه دریا می باید به تا ثابت
داشته تا بتوان یک یک آن را می سنج کرد.
نوشتن معادله دینامیک و نوشتن:





$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_0 x_1 - c_0 \dot{x}_1 - k_1 (x_1 - x_2) - c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_1(t)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_0 + c_1) \dot{x}_1 - c_1 \dot{x}_2 + (k_0 + k_1) x_1 - k_1 x_2 = F_1(t) \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (c_1 + c_2) \dot{x}_2 - c_1 \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_2 - k_1 x_1 = F_2(t) \quad (2)$$

معمولی معادلات را داریم (نویسید معادلات) حول در رابطه (۱) فقط باید بر حسب مختصات (۱) یعنی x_1 داشته و در معادله (۲) باید x_2 داشته باشیم که این چنین نیست.

روش اول: ابتدا شکل معادله را بصورت ماتریس می نویسیم و در انتها آن یک بردار هم معرفی می کنیم.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{IM} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 + c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}}_F$$

$$IM \ddot{X} + C \dot{X} + K X = F$$

IM = ماتریس جرم ها

C = ماتریس میرایی ها

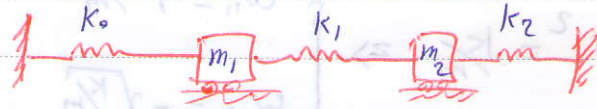
K = ماتریس سختی

این ماتریس ها در زمانی که در درجه آزادی داشته بصورت 2×2 شده اند و می توانیم اگر سه درجه آزادی داشته باشیم این ماتریس ها 3×3 می شود و ...

ارغاشات آزاد بدون میرایی: $(F=0, \quad \dot{x}=0)$ (میرایی و نیروی محرک مفروضه)

$$M \ddot{x} + Kx = 0$$

در این صورت معادله تفاضلی مرتبه را بدون شکل داریم:



$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_0 + k_1) x_1 - k_1 x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2 - k_1 x_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1(t) = ? \\ x_2(t) = ? \end{cases}$$

$$x_1 = \hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi), \quad x_2 = \hat{x}_2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$[-\omega^2 M + K] \hat{x} \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

حل معادله را در زمان $t=0$ جایگزین می‌کنیم

$$[K - \omega^2 M] \hat{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_0 + k_1 - m_1 \omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \text{دامنه } m_1 \\ \hat{x}_2 &= \text{دامنه } m_2 \end{aligned}$$

لازمه اینکه $\hat{x}_1$ و $\hat{x}_2$ صفر نباشند باید $\det(K - \omega^2 M) = 0$

$$\begin{bmatrix} k_0 + k_1 - m_1 \omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

بدون لحاظ زدن به شیوه مناسب می‌توان
برای استخراج حل معادلات این
معادله را انجام دهیم:

$$m_1 = m_2 = m, \quad k_0 = k_1 = k_2 = k$$

$$\det \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (2k - m\omega^2)^2 = k^2$$

$$2k - m\omega^2 = \pm k \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{11} = \sqrt{k/m} \\ \omega_{12} = -\sqrt{k/m} \end{cases} \\ \omega_2^2 = \frac{3k}{m} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{21} = \sqrt{3k/m} \\ \omega_{22} = -\sqrt{3k/m} \end{cases} \end{cases}$$

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{3k/m}$$

البته جواب های منفی برای فرکانس قبول هستند.

$$f_{n1} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f_{n2} = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

وی توان گفت برای یک سیستم دارای n درجه آزادی n فرکانس طبیعی وجود دارد.

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الان می توان نسبت بین $\hat{x}_1$ و $\hat{x}_2$ را بدست آورد و بردارهای ویژه را بنویسیم:

$$\frac{\hat{x}_{21}}{\hat{x}_{11}} \Big|_{\omega=\omega_1} = \frac{2k - m\omega_1^2}{k} = h_1 = \frac{2k - m \frac{k}{m}}{k} = 1$$

یعنی $\hat{x}_1$ و $\hat{x}_2$ با هم برابر هستند.

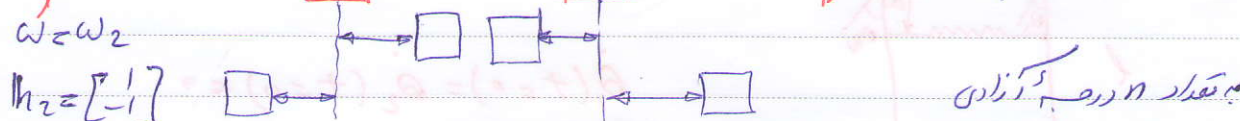
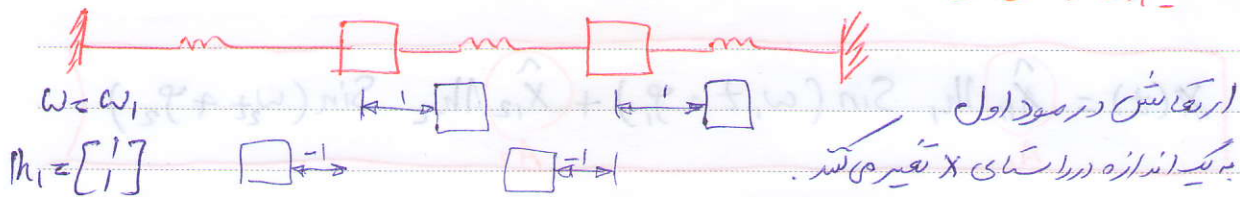
$$\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} \\ \hat{x}_{21} \end{bmatrix} = \hat{x}_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \hat{x}_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ h_1 \end{bmatrix} \rightarrow h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ h_1 \end{bmatrix}$$

بردار مودال

$$\frac{\hat{x}_{22}}{\hat{x}_{12}} \Big|_{\omega=\omega_2} = \frac{2k - m\omega_2^2}{k} = \frac{2k - m \frac{3k}{m}}{k} = h_2 = -1$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{بردار مورد طبیعی دوم}$$

تفاوت هم بردارهای مورد:



n مورد طبیعی داریم. و عبارتی بردارهای ویژه بردارهای مورد طبیعی شده اند و در حالت جاری سیستم بصورت ترکیبی از این دو مورد ارتعاش و نوسان می کنند.

$$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{و اما می سب؟} \quad x_1(t), x_2(t)!$$

$$x_1 = \hat{x}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = \hat{x}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} \\ \hat{x}_{21} \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_2 = \begin{bmatrix} \hat{x}_{12} \\ \hat{x}_{22} \end{bmatrix}$$

مجموع دو مورد:

$$x(t) = \hat{x}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{x}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

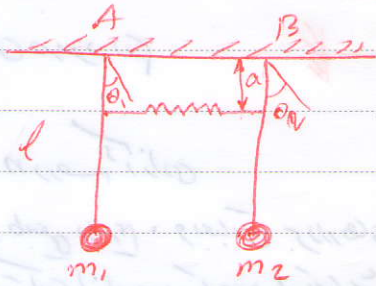
$$x_1(t) = \hat{x}_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{x}_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2(t) = \hat{x}_{21} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{x}_{22} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

می بینیم که شش مجهول داریم و برای حل مسئله از شش هائی که بدست آورده ایم استفاده می کنیم.

$$\hat{x}_{21} = h_1 \hat{x}_{11} \quad , \quad \hat{x}_{22} = h_2 \hat{x}_{12}$$

$$x(t) = \underbrace{\hat{x}_{11}}_{A_1} h_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \underbrace{\hat{x}_{12}}_{A_2} h_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$



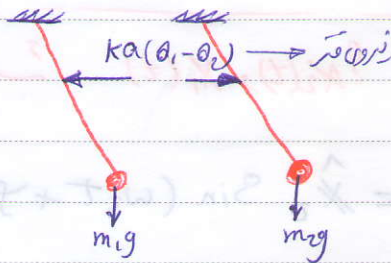
$$m_1 = m_2 = m$$

مثال :

$$\dot{\theta}_1(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) = 0$$

$$\theta_1(t=0) = \theta_2(t=0) = 0$$

$$\theta_2(t=0) < 0$$



$$I_A = m_1 l^2, \quad I_B = m_2 l^2$$

$$I_A \ddot{\theta}_1 = (\sum M)_A$$

$$m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 = -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - m_1 g l \sin \theta_1$$

$$m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + (ka^2 + m_1 g l) \theta_1 - ka^2 \theta_2 = 0 \quad (1)$$

حل این معادلات :

$$m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + (ka^2 + m_2 g l) \theta_2 - ka^2 \theta_1 = 0 \quad (2)$$

صورت ماتریسی می نویسیم :

$$\begin{bmatrix} m_1 l^2 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ka^2 + m_1 g l & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2 + m_2 g l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

می توان همواره مختصات را با ضرایب ثابت و فرکانس ثابت به آنگاه غیر همگنی شوند.

برای هر کدام از صبرم ها می توان در فراسن مستقل و جداگانه بدست می آید. چنین مختص هایی را مختص های اصلی می نامند.

اگر ماتریس M قطری باشد و ماتریس K غیر قطری: همبندی استاتیکی داریم.
 اگر ماتریس M غیر قطری و ماتریس K قطری باشد: همبندی دینامیکی داریم.
 اگر هر دو ماتریس غیر قطری باشند: همبندی دینامیکی - استاتیکی داریم.
 اگر هر دو ماتریس قطری باشند: همبندی نداریم.

از این رابطه می توان فرکانس ها را رسم: $\det(K - M\omega^2) = 0$

برای $m_1 = m_2$ خواهیم داشت:

$$\det \left[\begin{bmatrix} ka^2 + mgl & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2 + mgl \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \omega^2 \right] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2) = \pm ka^2 \rightarrow \omega_1^2 = \frac{g}{l}$$

$$f_{n1} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$f_{n2} = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}$$

$$\begin{bmatrix} ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_1} = \frac{ka^2 + mgl - m\ell^2 \omega^2}{ka^2}$$

$$\frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_1} \Big|_{\omega = \omega_1} = \frac{ka^2 + mgl - m\ell^2 \frac{g}{\ell}}{ka^2} = 1 = h_1$$

$$\frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_1} \Big|_{\omega = \omega_2} = \frac{ka^2 + mgl - m\ell^2 \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2ka^2}{m\ell^2} \right)}{ka^2} = -1 = h_2$$

$$h_1 = [h_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h_2 = [h_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \hat{\theta}_1 h_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{\theta}_2 h_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\theta_1(t) = \hat{\theta}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{\theta}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\theta_2(t) = \hat{\theta}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \hat{\theta}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\dot{\theta}_1(t) = \hat{\theta}_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{\theta}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \hat{\theta}_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \hat{\theta}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\theta_1(t=0) = \theta_0$$

این شرایط اولیه را با شرایط مرزی در هم میزنیم:

$$\hat{\theta}_1 \sin \varphi_1 + \hat{\theta}_2 \sin \varphi_2 = \theta_0 \quad (1)$$

(91)

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$$\theta_2(t=0) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{11} \sin \varphi_1 - \hat{\theta}_{12} \sin \varphi_2 = 0 \quad (2)$$

$$\dot{\theta}_1(t=0) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{11} \omega_1 \cos \varphi_1 + \hat{\theta}_{12} \omega_2 \cos \varphi_2 = 0 \quad (3)$$

$$\dot{\theta}_2(t=0) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{11} \omega_1 \cos \varphi_1 - \hat{\theta}_{12} \omega_2 \cos \varphi_2 = 0 \quad (4)$$

$$(3) + (4) \Rightarrow 2 \hat{\theta}_{11} \omega_1 \cos \varphi_1 = 0 \Rightarrow \cos \varphi_1 = 0 \quad \boxed{\varphi_1 = \frac{\pi}{2}}$$

$$(3) - (4) \Rightarrow 2 \hat{\theta}_{12} \omega_2 \cos \varphi_2 = 0 \Rightarrow \cos \varphi_2 = 0 \quad \boxed{\varphi_2 = \frac{\pi}{2}}$$

$$(1) \Rightarrow \hat{\theta}_{11} + \hat{\theta}_{12} = \theta_0$$

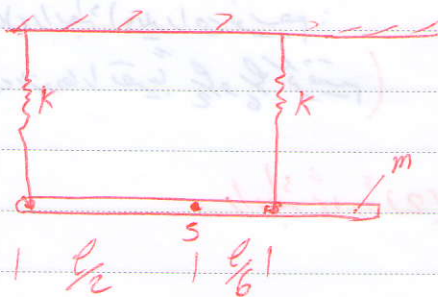
$$(2) \Rightarrow \hat{\theta}_{11} - \hat{\theta}_{12} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{12} = \hat{\theta}_{11} = \frac{\theta_0}{2}$$

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2} \sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \frac{\theta_0}{2} \sin(\omega_2 t + \frac{\pi}{2})$$

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2} \sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) - \frac{\theta_0}{2} \sin(\omega_2 t + \frac{\pi}{2})$$

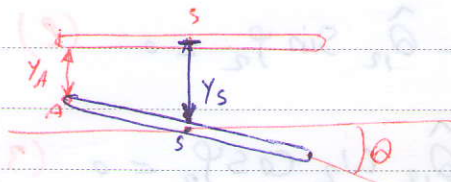
طبق ۵ یازدهم: 27, 2, 91، چهارشنبه



مسئله: برای مدلهای بلند و نازک که توسط دو فنر در دو نقطه مشخصه شده و در یک نام طایفه مشخصه K هستند، دو فرکانس طبیعی را تعیین کنید. اینی از فنرها به انتهای میله متصل بوده و دیگری به فاصله یک ششم طول میله از سر دیگر آن، متصل می باشد.

$$\omega_2^2 = 4 \frac{K}{m}, \quad \omega_1^2 = \frac{4}{3} \frac{K}{m} \quad (ع)$$

PAPCO



جایابی مرکز جرم را با y_s نشان

می دهیم:

مقطع می کنیم هذ نقطه جرم به اندازه y_s یا ش

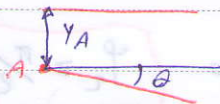
آمده و به اندازه θ حول S چرخیده اند.

و بهترین بخش ممکن S می باشد زیرا این روابط را داریم:

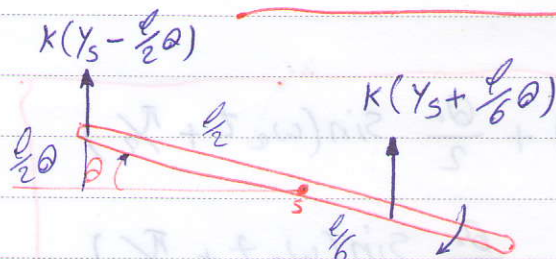
$$\sum F = m a_s$$

$$I_s \alpha = (\sum M)_s$$

یا می توانیم موارد بالا را نسبت به A بنویسیم و به عبارتی می توانیم بی نهایت بخش داشته باشیم ولی
همانطور که گفتیم بهترین بخش ممکن مرکز جرم (S) می باشد.



بنابر این لفته ها بخش های متصل از جرم را S و θ می نامیم که بخاطر متصل بودن از جرم
دور در صبه آن را ردی داریم.



و یک گرامم آن را رد:

θ بسیار کوچک فرض می شود.

جرم را در نظر نمی گیریم چون فرض را بر تعادل
استاتیکی سیستم گذاشتیم.

$$m \ddot{y}_s = -K(y_s - \frac{l}{2}\theta) - K(y_s + \frac{l}{6}\theta)$$

$$m \ddot{y}_s + 2Ky_s - K\frac{l}{3}\theta = 0$$

رابطه شماره (۱)

برای تشخیص جهت نیروها
باید دقت کنیم.

$$I_s \ddot{\theta} = (\sum M)_s = K(y_s - \frac{l}{2}\theta) \frac{l}{2} - K(y_s + \frac{l}{6}\theta) \frac{l}{6}$$

حال رابطه (۱) و (۲) را می نویسیم:

(طول بازوها را تقریباً $\frac{l}{2}$ و $\frac{l}{6}$ می گیریم)

$$I_s \ddot{\theta} + \frac{10}{36} K l^2 \theta - \frac{1}{3} K l y_s = 0$$

رابطه شماره (۲)

حال با استفاده از روابط (۱) و (۲) ماتریس‌ها را تشکیل دهیم:

$$\ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_s \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} y_s \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_s \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -\frac{k\ell}{3} \\ -\frac{k\ell}{3} & \frac{10}{36}k\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_s \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$IM \ddot{X} + KX = 0 \quad (K \text{ ماتریس سختی}, I \text{ ماتریس جرم})$$

فرم ماتریسی معادلات دینامیک حرکت. باید دقت کنیم که از ضرب $IM \times \ddot{X}$ باید به سمت اول روابط‌های (۱) و (۲) برسیم.

برای رسیدن به معادله فرکانس باید این رابطه را برقرار کنیم: $\det(K - IM\omega^2) = 0$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2k & -\frac{k\ell}{3} \\ -\frac{k\ell}{3} & \frac{10}{36}k\ell^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \omega^2 \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} +2k - m\omega^2 & -\frac{k\ell}{3} \\ -\frac{k\ell}{3} & \frac{10}{36}k\ell^2 - \frac{1}{12}m\ell^2\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad \boxed{I_s = \frac{1}{12}m\ell^2}$$

$$\frac{5}{9}k\ell^2 - \frac{1}{6}km\ell^2\omega^2 - \frac{5}{18}km\ell^2\omega^2 + \frac{1}{12}m^2\ell^2\omega^4 - \frac{k\ell^2}{9} = 0$$

$$\left(\frac{1}{12}m^2\omega^4 - \frac{4}{9}km\omega^2 + \frac{4}{9}k^2 = 0 \right) \times \frac{36}{m^2}$$

$$3\omega^4 - 16\frac{k}{m}\omega^2 + 16\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad \text{بریک معادله درجه ۲ بر حسب } \omega^2 \text{ داریم.}$$

$$a = 3 \quad b = -16\frac{k}{m} \quad c = 16\left(\frac{k}{m}\right)^2$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{8 \frac{k}{m} \pm \sqrt{64(\frac{k}{m})^2 - 48(\frac{k}{m})^2}}{3} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48} \frac{k}{m}}{3}$$

با به دست می آید. با به دست می آید. با به دست می آید. با به دست می آید.

$$\omega_1^2 = \frac{4}{3} \frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = 4 \frac{k}{m}$$

با به دست می آید. با به دست می آید. با به دست می آید. با به دست می آید.

$$f_{n1} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{k}{m}}$$

$$f_{n2} = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 \frac{k}{m}}$$

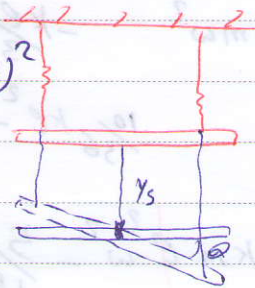
$$\frac{dE}{dt} = 0$$

روش انرژی: از آنجایی که سیستم پایدار است بنابراین داریم:

$$E_p = \frac{1}{2} k (y_s - \frac{\ell}{2} \theta)^2 + \frac{1}{2} k (y_s + \frac{\ell}{6} \theta)^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{y}_s^2 + \frac{1}{2} I_s \dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{y}_s^2 + \frac{1}{2} I_s \dot{\theta}^2$$



$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = 0$$

$$m \dot{y}_s \ddot{y}_s + I_s \dot{\theta} \ddot{\theta} + k (\dot{y}_s - \frac{\ell}{2} \dot{\theta}) (y_s - \frac{\ell}{2} \theta) +$$

$$k (\dot{y}_s + \frac{\ell}{6} \dot{\theta}) (y_s + \frac{\ell}{6} \theta) = 0$$

کتابراز $\dot{y}_s$ و کتابراز $\dot{\theta}$ فاکتوری گیریم:

$$\dot{y}_s \Rightarrow \dot{y}_s \left(m\ddot{y}_s + k(y_s - \frac{\ell}{2}\theta) + k(y_s + \frac{\ell}{6}\theta) \right) +$$

$$\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} \left(I_s\ddot{\theta} - k\frac{\ell}{2}(y_s - \frac{\ell}{2}\theta) + k\frac{\ell}{6}(y_s + \frac{\ell}{6}\theta) \right) = 0$$

$$\dot{y}_s \left(m\ddot{y}_s + 2ky_s - k\frac{\ell}{3}\theta \right) + \dot{\theta} \left(I_s\ddot{\theta} + \frac{10}{36}k\ell^2\theta - k\frac{\ell}{3}y_s \right) = 0$$

وزماني این عبارت صفري شود ضرب $\dot{y}_s$ و $\dot{\theta}$ صفر شوند:
 $AX + BY = 0$
 مثلاً در عبارت دوم وزماني که x و y متساوی باشند صفر شود A و B هر دو صفر باشند.
 بنابراین می‌توانیم عبارت‌های داخل پرانتز باید برابر صفر باشند.

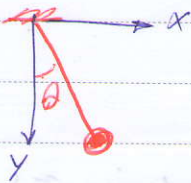
تذکر: از این روش فقط برای سیستم‌های پایداری استفاده می‌شود. (روش انرژی)

روش لاگرانژ: ابتدا تابع لاگرانژ را می‌نویسیم:

$$L = T - V = E_c - E_p$$

برای نوشتن این تابع باید نسبت به مختصات عمومی

عمل کنیم.



مختصات عمومی: اگر به تعداد درجه آزادی مختصات داشته باشیم

آنگاه مختصات را مختصات عمومی گویند.

آمر در مثال ردی و مدار دینامیک حرکت را بر حسب x و y بدست

آوریم مختصات دیگر عمومی نیست زیرا سیستم باید درجه آزادی است در حالتی که دو مختصات داریم.

مختصات عمومی سیستم θ می‌باشد.

مختصات عمومی: اگر مختصات‌های انتخاب شده برای شیخ حرکت، برابر هندسه آزادی سیستم

باشند آن‌ها را مختصات عمومی می‌گویند.

(تا الان هر مختصاتی که استفاده می‌کردیم مختصات عمومی بودند)

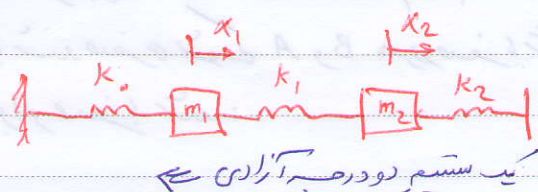
برای روش مختص های عمومی را بصورت q_1, q_2, q_3 می نویسند
و مشتق هر مختص عمومی (مست) را بصورت $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ می نویسند

روش لاگرانژ برای نوشتن معادله دیفرانسیل حرکت:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \right\} \quad \text{نیروهای عمومی}$$

در صورتیکه نیروی بیرونی در سیستم $Q_k = 0$ است

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$



$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} k x_2^2$$

حال از L نسبت به $\dot{x}_1$ مشتق می گیریم و در رابطه اصلی جایگزین می کنیم.

$$\frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1) - (-k x_1 - k(x_1 - x_2)) = 0$$

حال مشتق زمانی را حسب می گیریم:

$$m_1 \ddot{x}_1 + 2k x_1 - k x_2 = 0$$

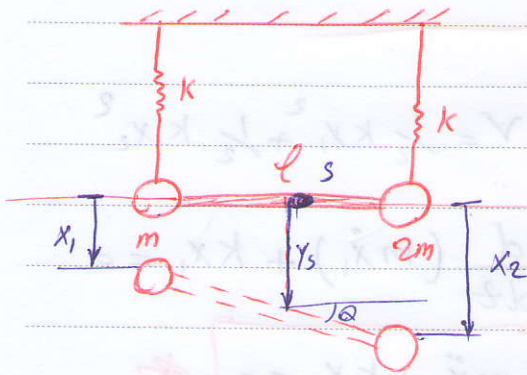
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

باید دقت کنیم باید از L مشتق جزئی بر حسب $\dot{x}_2$ بگیریم.

$$\frac{d}{dt} (m_2 \dot{x}_2) - (-K(-1)(x_1 - x_2) - Kx_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + 2Kx_2 - Kx_1 = 0$$

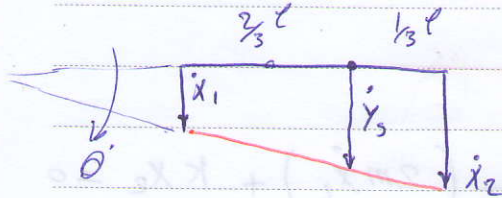
این روش برای سیستم‌های پیچیده کاربرد موشوری دارد.



مثال: مختص هاراهم می‌توان مثل مثال قبل عمل کرد و هم می‌توان x_1 و x_2 جابجایی موشوری را مختص انتخاب کنیم.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} 2m \dot{x}_2^2 =$$

$$T = \frac{1}{2} 3m \dot{x}_s^2 + \frac{1}{2} I_s \dot{\theta}^2$$



رابطه بین $\dot{x}_1$ ، $\dot{x}_2$ و $\dot{\theta}$

$$\dot{x}_1 = r_1 \dot{\theta} \quad \dot{x}_2 = r_2 \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_s = (r_1 + \frac{2}{3} l) \dot{\theta} = (r_2 - \frac{l}{3}) \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l}$$

$$V = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K x_2^2$$

انرژی پتانسیل سیستم

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

ساده سازی رابطه اصلی لاگرانژ:

انرژی پتانسیل هیچ وقت تابع سرعت نیست

و معمولا انرژی جنبشی تابع جابجایی نیست درنصورت

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_k} \right) = 0 = Q_k$$

رابطه اصلی لاگرانژ

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} 2m \dot{x}_2^2, \quad V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}_1) + k x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m \ddot{x}_1 + k x_1 = 0$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m}$$

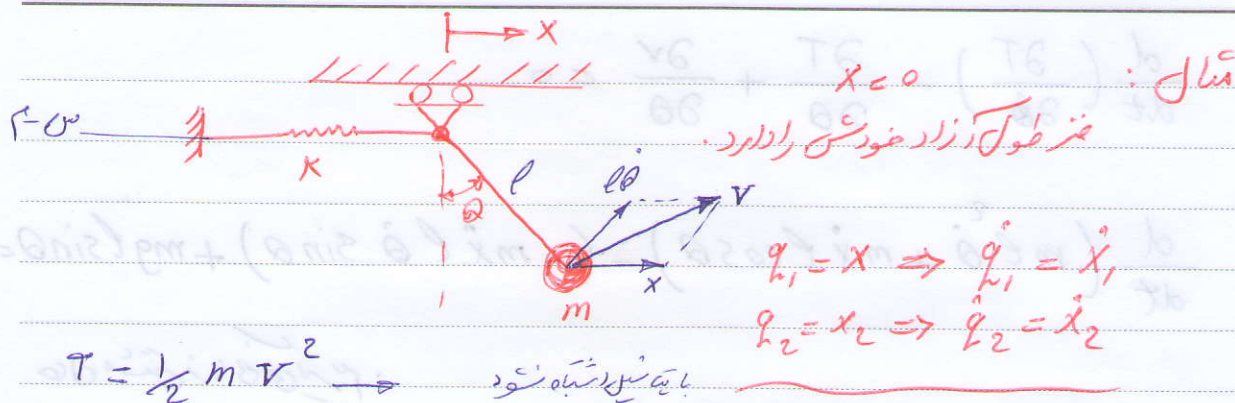
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (2m \dot{x}_2) + k x_2 = 0$$

$$2m \ddot{x}_2 + k x_2 = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{k}{m}$$

اندیس گذاری، ω را براساس کوچک بودن نداشتیم.

فرض های اصلی: فرض های راویند مقدار ک حرکت براساس آنها همگی ندارند. مثل
مضیق x_1 و x_2 براساس مثال ۲ پس از حل دیدیم در آنها همگی نداشتیم.



سرعت و جای در انرژی جنبشی تاثیر دارند.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

تپانین فقط تابع جای است.

$$V = \frac{1}{2} k x^2 - m g l \cos \theta$$

چون تپانین فقط تابع جای است. $-\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = 0$

رابطه اولیه لاگرانژ برای کل سیستم.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x} + m l \dot{\theta} \cos \theta) - 0 + k x = 0$$

$$m \ddot{x} + m l \ddot{\theta} \cos \theta - m l \dot{\theta}^2 \sin \theta + k x = 0$$

می بینیم که برای معادله غیر خطی هستیم و باید معادله را خط کنیم بدین صورت که از θ بیرون بیرون بیاوریم. چون $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را به صورت تقریبی میگیریم.

$$m \ddot{x} + m l \ddot{\theta} + k x = 0$$

شکل خطی شده معادله است

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m l^2 \ddot{\theta} + m \dot{x} l \cos \theta) - (-m \dot{x} l \dot{\theta} \sin \theta) + m g l \sin \theta = 0$$

حال مشتق زمانی می گیریم:

$$m l^2 \ddot{\theta} + m l \ddot{x} \cos \theta - m l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + m l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + m g l \sin \theta = 0$$

حال این معادله را باید به صورت خطی بنویسیم

$$m l^2 \ddot{\theta} + m l \ddot{x} + m g l \theta = 0$$

کامل خطی شد

نکته مهم: اگر فقط آویز ثابت باشد آنگاه $(\dot{x} = 0)$ می شود بنابراین:

$$m l^2 \ddot{\theta} + m g l \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

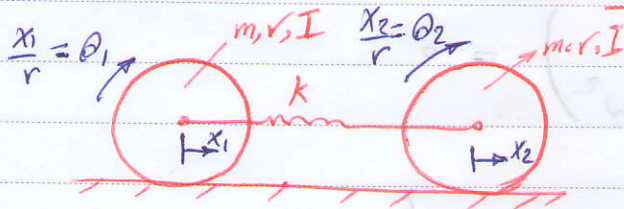
$$\begin{cases} m \ddot{x} + m l \ddot{\theta} + k x = 0 \\ m l^2 \ddot{\theta} + m l \ddot{x} + m g l \theta = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

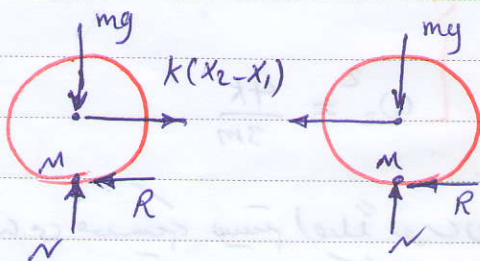
$$\begin{bmatrix} m & m l \\ m l & m l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m g l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در این مثال دیدیم که مارتین جرمها غیر قطری است ولی مارتین سختی قطری است.
این حالت همگسری دنیا مسی گویند.

حلبه دوازدهم: 30, 2, 91, شنبه



مثال: فرکانس های طبیعی سیستم
مقابل را با هم مقایسه کنید.



در این سیستم اولین اویلر =
فرکانس شده است و به طول سابق خودش
می خواهد برگردد

$$I_M \ddot{\theta}_1 = (\sum M)_M = k(x_2 - x_1)r$$

$$\left(\frac{3}{2}mr^2\right) \frac{\ddot{x}_1}{r^2} + kx_1 - kx_2 = 0$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0$$

$\Rightarrow$ و همچنین برای ماسه دوم داریم:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0$$

$$m\ddot{x}_s = k(x_2 - x_1) - R$$

در این حرکت نسبت به مرکز جرم:

$$I_s \ddot{\theta}_1 = (\sum M)_s = R_1 r$$

باید وقت کنیم در این صورت باید R را
می توانیم چون R حول مرکز جرم
چرخش را ایجاد می کند.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ و } \ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}$$

حال باید شکل مارتین را بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(k - m\omega^2) = 0$$

برای رسیدن به معادله فرکانس

$$\det \begin{pmatrix} k - \frac{3}{2}m\omega^2 & -k \\ -k & k - \frac{3}{2}m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$k - \frac{3}{2}m\omega^2 = \pm k \Rightarrow \omega_1^2 = 0$$

$$\omega_2^2 = \frac{4k}{3m}$$

از ω_1^2 می بینیم، سیستم اصلاً نوسان نمی زند. در چنین سیستم هایی ω^2 برابر صفر و در این سیستم های نوسان کننده مثبت است.

$$E = \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 \quad \text{روش انرژی:}$$

$$E = \frac{1}{2} (\frac{3}{2}m) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} (\frac{3}{2}m) \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{برای سیستم های پایدار}$$

$$\frac{3}{2}m \dot{x}_1 \ddot{x}_1 + \frac{3}{2}m \dot{x}_2 \ddot{x}_2 + k(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)(x_2 - x_1) = 0$$

$$\dot{x}_1 \left[\frac{3}{2}m \ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) \right] + \dot{x}_2 \left[\frac{3}{2}m \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) \right] = 0$$

$$\dot{x}_1 \left(\frac{3}{2}m \ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 \right) + \dot{x}_2 \left(\frac{3}{2}m \ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 \right) = 0$$

روش لاگرانژ: حاصل بر حسب سرعتها

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m \right) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m \right) \dot{x}_2^2$$

حاصل بر حسب (تابع) جابجایی

$$V = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

$q_1 = x_1$
 $q_2 = x_2$

چون تابعیت سرعت برای انرژی جنبشی و جابجایی برای انرژی پتانسیل برقرار است از این رابطه استفاده می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} m \dot{x}_1 \right) + (k(-1)(x_2 - x_1)) = 0$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{x}_1 + k x_1 - k x_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} m \dot{x}_2 \right) + (k(x_2 - x_1)) = 0$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{x}_2 + k x_2 - k x_1 = 0$$

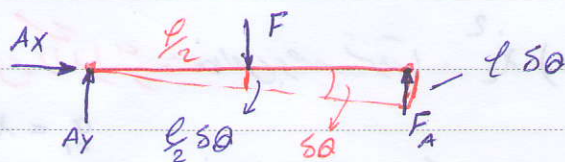
روش لاگرانژ برای سیستم‌های غیر یکنواخت: (غیر از نیروی وزن و نیروی قهر):

مقدمه: (کار مجازی) کاری است که وجود خارجی ندارد و در عمل اتفاق نمی‌افتد.

طراحی دینامیکی نقطه انرژی $W_F = \int F \cdot dr$ اگر طبعی داشته باشد



ولی اگر تغییر مکان را آن نیروی F نداشته باشیم $\Rightarrow$ تغییر مکان دینامیکی مجازی $\Rightarrow \delta r$



$$F \cdot \frac{l}{2} - F_A \cdot l = 0$$

$$F_A = \frac{F}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$$

مشق 6: مجازی نسبت به q_k
 کار مجازی همه نیروهای سیستم را بدست می آوریم
 و به مشق لبری به نتیجه می رسیدیم
 نیروهای مورد بحث را فقط برای کار مجازی استفاده می کنیم و فقط نقطه آزاد را در اختیار بگیریم
 مکان مجازی می بینیم.



مثال: با روش لایبزنس روی درخت را می سبک کنید.

$$q_1 = x, \quad \dot{q}_1 = \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_1$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2} k x^2, \quad W = F(t) \cdot x$$

$$Q_1 = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial (F(t) \cdot x)}{\partial x} = F(t)$$

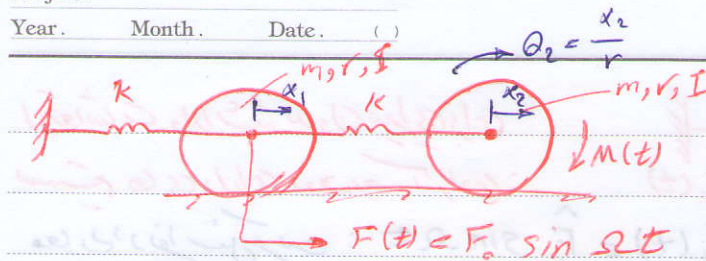
نیرو را بدون تغییر در رابطه قرار می دهیم و فقط مکان آزاد را تغییر می بینیم (جایابی نقطه آزاد)

با این روش $F(t)$ را می سبک کردیم.

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}) + k x = F(t)$$

$$m \ddot{x} + k x = F(t)$$

برای سیستم های غیر پسیو رویان اثری جوابگو نیست.



مثال: دو درجه آزادی سیستم وارد
می شود. یکی نیروی $F(t)$ و یکی
گشتاور $M(t)$ در

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}m \right) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}m \right) \dot{x}_2^2$$

انرژی جنبشی

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

انرژی پتانسیل

$$W = F(t) \cdot x_1 + M(t) \cdot \theta_2$$

حال باید کار انجام شده روی سیستم را

$$W = F(t) x_1 + M(t) \frac{x_2}{r}$$

بر حسب مختصات عمومی می نویسیم
و نیروهای $F(t)$ و $M(t)$ را ثابت
فرض می کنیم.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_1} = Q_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1}$$

چون x_2 مستقل از x_1 است

$$\frac{3}{2} m \ddot{x}_1 + k x_1 + k(-1)(x_2 - x_1) = F(t) \quad \leftarrow \text{در مشتق بدین شکل نوشتیم}$$

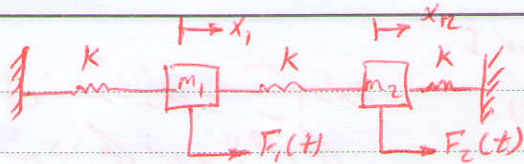
$$\boxed{\frac{3}{2} m \ddot{x}_1 + 2k x_1 - k x_2 = F(t)} \quad \text{I}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_2} = Q_2 = \frac{\partial W}{\partial x_2}$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = \frac{M(t)}{r} = \frac{M_0}{r} \sin \Omega t$$

$$\boxed{\frac{3}{2} m \ddot{x}_2 + k x_2 - k x_1 = \frac{M_0}{r} \sin \Omega t} \quad \text{II}$$

کنیم باید به این ۲ معادله از طریق قانون ماتریس ها فرکانس ها را حساب کنیم.



ارتعاشات وادارت به بدون میرایی برای
سیستم های دارای درجه های آزادی:

معادله دینامیک مرتبه اول: $m_1 \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_1(t) = \hat{F}_1 \sin \Omega t$

$m_2 \ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = F_2(t) = \hat{F}_2 \sin \Omega t$

$1M \ddot{X} + 1K X = 1F(t) \quad \text{مکمل ماتریسی} = \hat{F} \sin \Omega t \quad \left| \hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{bmatrix} \right.$

جواب همن ←

جواب غیر همن ← این جواب را در معادله مرتبه اول (هم) : $\hat{x}_p(t) = \hat{x}_p \sin \Omega t$

$\hat{x}_p = \begin{bmatrix} \hat{x}_{p1} \\ \hat{x}_{p2} \end{bmatrix} \quad \hat{\ddot{x}}_p = \begin{bmatrix} \hat{\ddot{x}}_{p1} \\ \hat{\ddot{x}}_{p2} \end{bmatrix} \quad \hat{\ddot{x}}_p(t) = -\Omega^2 \hat{x}_p \sin \Omega t$

$[-\Omega^2 1M \hat{x}_p + 1K \hat{x}_p] \sin \Omega t = \hat{F} \sin \Omega t$

$(1K - 1M \Omega^2) \hat{x}_p = \hat{F}$

مجموع این رابطه $\hat{x}_p$ اسکالر باید بیست آوریم.

برای محاسبه $\hat{x}_p$ طرفین رابطه را در ماتریس
مکمل ضرب ضرب می کنیم:

$\hat{x}_p = (1K - 1M \Omega^2)^{-1} \hat{F}$

$\hat{x}_p = \begin{bmatrix} \hat{x}_{p1} \\ \hat{x}_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k - m\Omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\Omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$

حاشیه ریاضی

$$\hat{\dot{x}}_p = \begin{bmatrix} \hat{x}_{p1} \\ \hat{x}_{p2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(1k - 1m\omega^2)} \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & k \\ k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_{p1} = \frac{(2k - m\omega^2) \hat{F}_1 + k \hat{F}_2}{\det(1k - 1m\omega^2)}$$

دامنه‌های دینامیکی حرکت

$$\hat{x}_{p2} = \frac{k \hat{F}_1 + (2k - m\omega^2) \hat{F}_2}{\det(1k - 1m\omega^2)}$$

اگر خروجی دو دامنه دینامیکی برابر صفر گردد هر دو دامنه به حالت بی‌تاریکی می‌روند یعنی پدیده نرنونانسی انتخاب رخ می‌دهد.

با قرار دادن $\det(1k - 1m\omega^2) = 0$ می‌توانیم ω_1 و ω_2 را تعیین کنیم:

$$\det(1k - 1m\omega^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \omega_1 \\ \omega_2 = \omega_2 \end{cases}$$

زمانی که $\omega_1 = \omega_2$ شود در سیستم‌های دور رصبه آزادی پدیده نرنونانسی رخ می‌دهد. و برای سیستم‌های بی‌لخت رصبه آزادی، بی‌لختی فرکانس طبیعی داریم که به طبع بی‌لختی بار پدیده نرنونانسی می‌تواند رخ دهد. البته فرکانس‌های پایشی بیشتر از هر حالت رصبه است. و اول فرکانس‌های پایشی را مورد بررسی قرار می‌دهند.

نوشتن معادله دینامیکی حرکت: (حالت‌های دینامیکی ارتعاشی)

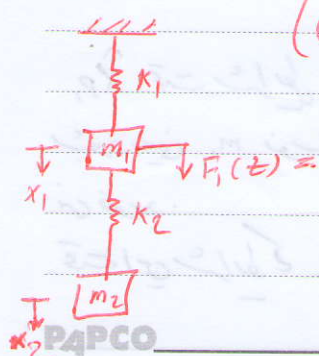
$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

تابع سرعت‌ها

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

تابع جابجایی

$$W = F_i(t) \cdot x_i$$



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_1} = Q_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1}$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = F_1(t)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 = F_1(t) \quad (I)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_2} = Q_2 = \frac{\partial W}{\partial x_2}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \quad (II)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_p = (\mathbf{K} - \mathbf{M} \Omega^2)^{-1} \hat{\mathbf{F}} \quad \text{جواب غیر همگن:}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_p = \begin{bmatrix} \hat{x}_{p1} \\ \hat{x}_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \Omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{p2} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{p1} \\ \hat{x}_{p2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{K} - \mathbf{M} \Omega^2)} \begin{bmatrix} k_2 - m_2 \Omega^2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_{p1} = \frac{(k_2 - m_2 \Omega^2) \hat{F}_1}{\det(\mathbf{K} - \mathbf{M} \Omega^2)}$$

$$\hat{x}_{p2} = \frac{k_2 \hat{F}_1}{\det(\mathbf{K} - \mathbf{M} \Omega^2)}$$

$$\hat{x}_{p1} = 0 \Rightarrow k_2 - m_2 \Omega^2 = 0$$

$\hat{x}_{p1}$ تحت شرایطی می تواند صفر
شود یعنی m_2 نوسان (شکل)

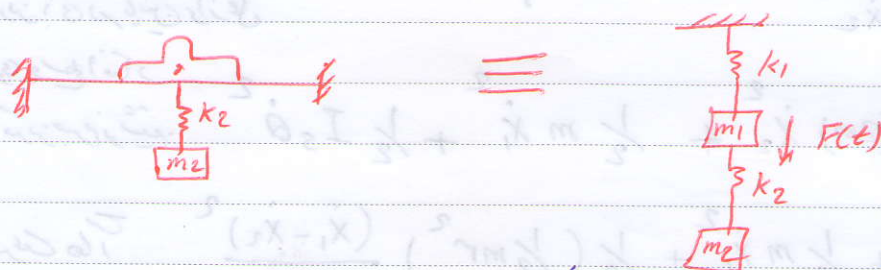
$$\Omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

نی خود
تحت این شرایط که m_2 داشته باشد m_1 نوسان نکند

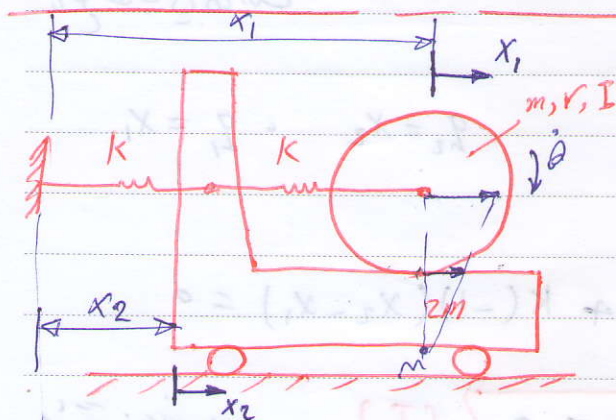
از این ایده استفاده می‌کنند و می‌کنند:



اگر یک موتور روی یک میله دارای نامیزانی صبر است قرار داشته باشد و در اولین روش بودن مثل این مدل عمل می‌کنند. یعنی نوسان ندارد ولی در زمانی که نامیزانی صبر اثر می‌کند نوسان ایجاد می‌شود. برای کنترل این نوسان از یک فنر و یک صبر با مشخصاتی وارد می‌کنند که $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ برقرار شود. یعنی در این حالت m_2 نوسان می‌کند و m_1 همان موتور باشد را ثابت نگه می‌دارد.



این ایده مبنای تئوریک جاذبه‌های دینامیکی ارتعاش است.



میله: سکوی به جسم $2m$ استوانه
توری به جسم m را نگه دارنده بطور
کنسان توسط یک فنر کوچک
شده است. دو فنر کشش طبیعی را مشخص
کنند: $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ ، $\omega_2^2 = \frac{2k}{7m}$

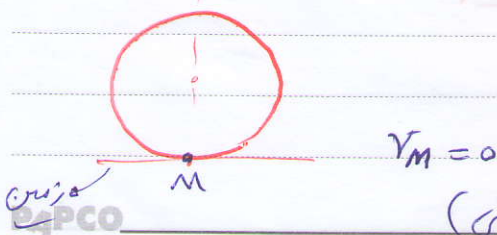
به روش های نیوتن - اولیور انرژی و

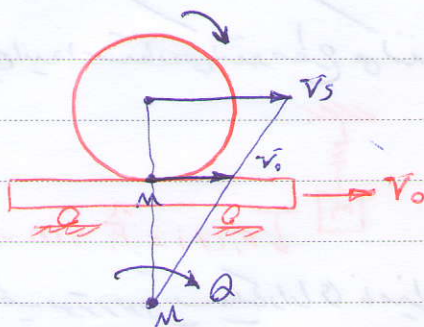
لاگرانژی می‌توان این مسئله را حل کرد.

در این مولارد (مثل این مسئله) حرکتی

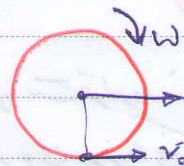
را روی سکو حرکت غلشی داریم.

سرعت نقطه تماس با سطح زیرین باید یکی باشد (در حرکت غلشی)

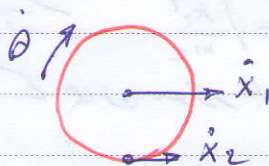




درشت‌ای که به سطح زمین دارای حرکت
باشد سرعت مرکز آن هم سرعت
با سطح زمین می‌باشد.



$$\omega = \frac{v_1 - v_o}{r}$$



$$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{r}$$

ط مشد:

چون مرکز آن در پائین قرار دارد

نمای نوی و سطح افکار

نسبت به مرکز جسم نرمیتم.

$$T = \frac{1}{2} (2m) \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} I_s \dot{\theta}^2$$

$$T = m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \frac{(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{r^2}$$

تابع سرعت ها است

$$V = \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

تابع جابجایی ها است

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0$$

$$q_2 = x_2, \quad q_1 = x_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(m \dot{x}_1 + \frac{1}{2} m (1) (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \right) + k(-1)(x_2 - x_1) = 0$$

$$\left\{ \frac{3}{2} m \ddot{x}_1 - \frac{1}{2} m \ddot{x}_2 + k x_1 - k x_2 = 0 \right\} \quad (I)$$

مستوی زمانی

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$$

(111)

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\frac{d}{dt} \left(2m\dot{x}_2 + \frac{1}{2}m(-1)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \right) + kx_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

$$\boxed{\frac{5}{2}m\ddot{x}_2 - \frac{1}{2}m\ddot{x}_1 + 2Kx_2 - kx_1 = 0} \quad II$$

می بینیم که هم ماتریس جرم ها و هم ماتریس سختی ها غیر قطری هستند.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & -\frac{1}{2}m \\ -\frac{1}{2}m & \frac{5}{2}m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} k - \frac{3}{2}m\omega^2 & -k + \frac{1}{2}m\omega^2 \\ -k + \frac{1}{2}m\omega^2 & 2k - \frac{5}{2}m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$= 2k^2 - \frac{5}{2}km\omega^2 - \frac{6}{2}km\omega^2 + \frac{15}{4}m^2\omega^4 - \frac{1}{4}m^2\omega^4 + km\omega^2 - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(k^2 - \frac{9}{2}km\omega^2 + \frac{7}{2}m^2\omega^4 = 0 \right) \times \frac{2}{m^2}$$

$$7\omega^4 - 9\frac{k}{m}\omega^2 + 2\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{14} \frac{k}{m} = \frac{9 \pm 5}{14} \frac{k}{m}$$

$$\omega_1^2 = \frac{2}{7} \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}$$

$$\begin{bmatrix} k - \frac{3}{2}m\omega^2 & -k + \frac{1}{2}m\omega^2 \\ -k + \frac{1}{2}m\omega^2 & 2k - \frac{5}{2}m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{بردارهای مورد طبیعی را باید}$$

PAPCO

$$(k - \frac{3}{2}m\omega^2) \hat{x}_1 - (k - \frac{1}{2}m\omega^2) \hat{x}_2 = 0$$

$$\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1} = \frac{k - \frac{3}{2}m\omega^2}{k - \frac{1}{2}m\omega^2} = \frac{k - \frac{3}{2}m \cdot \frac{2}{7} \frac{k}{m}}{k - \frac{1}{2}m \cdot \frac{2}{7} \frac{k}{m}} = \frac{\frac{4}{7}k}{\frac{6}{7}k} = \frac{2}{3} = h_1$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ h_1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{بردار سود اول}$$

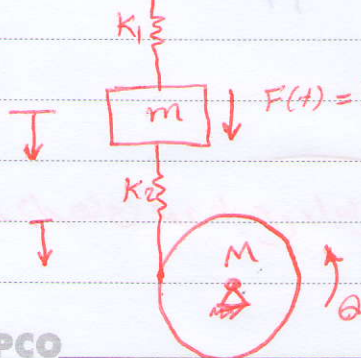
$$\frac{\hat{x}_{22}}{\hat{x}_2} = \frac{k - \frac{3}{2}m\omega_2^2}{k - \frac{1}{2}m\omega_2^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1 = h_2$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{بردار سود دوم}$$

معمولاً اگر سود اول مثبت آمد سود دوم منفی می آید.

حساب کنید: 3، 3، 9؛ چهار ربع

مثال: سیستم نشان داده شده شکل شده است از جسم m و جسم M که می توانند حول مرکز خود بچرخند. نیروی هارمونیک $F(t)$ مطابق شکل به جسم M وارد می گردد و سیستم نوسانات وادار شده با جابجایی کم (کوچک) انجام می دهد؛
(الف) معادلات را به روش لایترانزیت آوریید.
(ب) فرکانس های زاویه ای را برای حالت خاص



(ج) دامنه های حرکت را در حالت نوسان پایداری
بدست آورید و تعیین کنید برای چه مقدار ω جسم
 M در حالت سکون باقی می ماند.

از ω_1 و $\omega_2 = \omega_1$ استفاده می کنیم.

$$E_p = V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

$$E_c = T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} I \frac{\dot{x}_2^2}{r^2}$$

$$W = F_1(t) x_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_1} = Q_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1}$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}_1) + (k_1 x_1 + k_2 (-1)(x_2 - x_1)) = F_1(t)$$

$$m \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_2} = Q_2 = \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \dot{x}_2 \right) + (k_2 (x_2 - x_1)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} M \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0$$

$$k_1 = k_2 = k, \quad M = 2m \quad \text{چون دو توده}$$

$$m \ddot{x}_1 + 2k x_1 - k x_2 = F_1(t) = F_0 \sin \omega t$$

$$m \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k x_1 = 0 \quad \det(k - M\omega^2) = 0$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2k^2 - 3km\omega^2 + m^2\omega^4 - k^2 = 0$$

$$\omega^4 - 3\left(\frac{k}{m}\right)\omega^2 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

طوری زنگنه ریسمان را کنار k/m می بینیم. بنابراین $b=3$ متغیری داریم و در آخر k/m را اضافه می کنیم.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \frac{k}{m}$$

$$\omega_1^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}$$

(ج) ω و Ω در رابطه با هم نیستند.

$$\hat{x}_p = (k - m\Omega^2)^{-1} \hat{F}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2k - m\Omega^2 & -k \\ -k & k - m\Omega^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(k - m\Omega^2)} \begin{pmatrix} k - m\Omega^2 + k & k \\ k & 2k - m\Omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{p1} \\ \hat{x}_{p2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} k - m\Omega^2 & k \\ k & 2k - m\Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

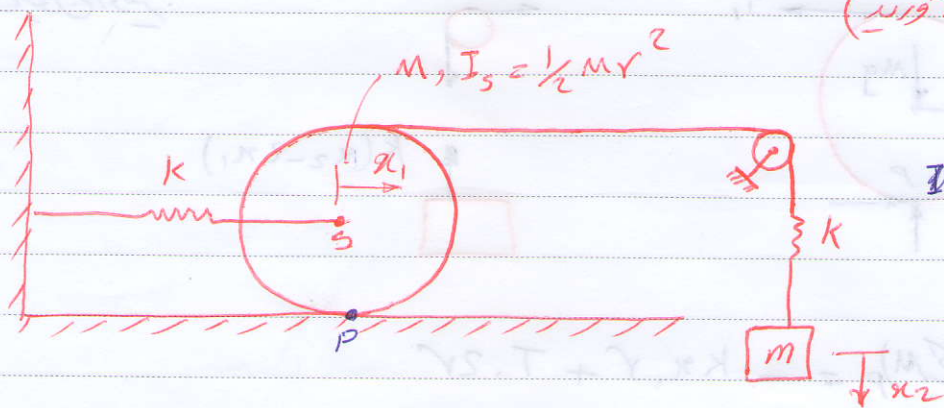
$$\hat{x}_{p1} = \frac{(k - m\Omega^2)}{\det} F_0$$

$$\hat{x}_{p2} = \frac{k}{\det} F_0$$

ترازانوسان سیستم $\hat{X}_p = 0$ است.

$$\hat{X}_p = 0 \Rightarrow k - m\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

مثال: در صورتی که فرض گردد کابل عمود بر کشش باشد و دایره دفرانسیل حرکت را به روشی که در اثر بر حسب جابجایی مرکز استوانه $x_3 = x_1$ و جابجایی صبرم $x_2 = m$ بدست آورید: اگر r ، m و k معلوم فرض گردند و $M = 10m$ باشد فرکانس های طبیعی سیستم را بدست آورید. (برای بدست آوردن فرکانس های توانید معادلات حرکت را از طریق دمج و به دست آورید)



$$T = \frac{1}{2} I_P \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} I_P \frac{\dot{x}_1^2}{r^2} + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

$$I_P = \frac{3}{2} Mr^2 = \frac{3}{2} 10mr^2 = 15mr^2$$

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (2x_1 - x_2)^2 \quad q_1 = x_1, \quad q_2 = x_2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = 0$$

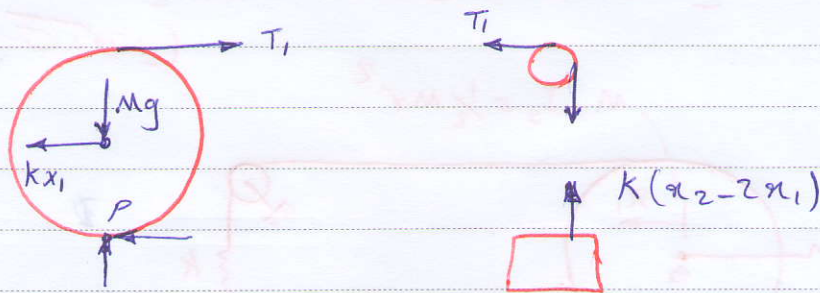
$$\frac{I_P}{r^2} \ddot{x}_1 + m \ddot{x}_2 + k x_1 + k (2\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(2x_1 - x_2) = 0$$

$$\ddot{x}_1 \left(\frac{I_p \ddot{x}_1}{r^2} + Kx_1 + 2K(2x_1 - x_2) + \ddot{x}_2 (m\ddot{x}_2 - K(2x_1 - x_2)) \right) = 0$$

عبارت داخل پرانتز را با صفر برابر می‌کنیم:

$$\frac{I_p \ddot{x}_1}{r^2} + Kx_1 + 2K(2x_1 - x_2) = 0$$

$$m\ddot{x}_2 - K(2x_1 - x_2) = 0$$



روش نیوتن اولی:

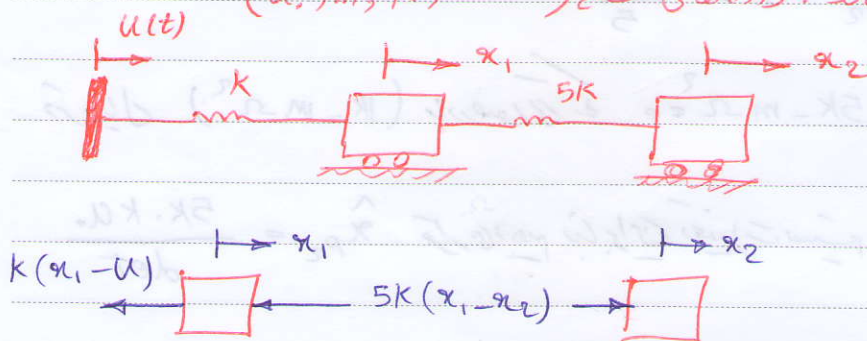
$$I_p \ddot{\theta} = (\sum M)_P = -Kx_1 r + T_1 \cdot 2r$$

$$I_p \frac{\ddot{x}_1}{r^2} = -Kx_1 + K(x_2 - 2x_1) \times 2$$

$$I_p \left(\frac{\ddot{x}_1}{r^2} \right) + 5Kx_1 - 2Kx_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 = -K(x_2 - 2x_1) \Rightarrow m\ddot{x}_2 + Kx_2 - 2Kx_1 = 0$$

مثال: اگر جابجایی ابتدایی فرستاده شود به صورت $(u = u_0 \sin \omega t)$ باشد جابجایی
 حرکت از دو جسم $(\hat{x}_{p1}, \hat{x}_{p2})$ را بدست آورید و تعیین کنید در چه فرکانسی $(\omega = ?)$
 جسم سمت چپ به حرکت میماند. (پارامترهای مسئله (u_0, m, k))



$$m\ddot{x}_1 = -5k(x_1 - x_2) - k(x_1 - u)$$

$$m\ddot{x}_1 + 6kx_1 - 5kx_2 = ku = \overset{\hat{F}_0}{ku_0} \sin \omega t$$

$$m\ddot{x}_2 = 5k(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_2 + 5kx_2 - 5kx_1 = 0$$

$$(K - M\omega^2) = \begin{pmatrix} 6k - m\omega^2 & -5k \\ -5k & 5k - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$(K - M\omega^2)^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} 5k - m\omega^2 & 5k \\ 5k & 6k - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}_p = \begin{pmatrix} \hat{x}_{p1} \\ \hat{x}_{p2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} 5k - m\omega^2 & 5k \\ 5k & 6k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}_{p1} = \frac{5k - m\omega^2}{\det} ku_0$$

$$\hat{x}_{p2} = \frac{5k}{\det} ku_0$$

سکون در سیستم به $\hat{x}_p = 0$ در این نقطه برای خواهر پوزیو:

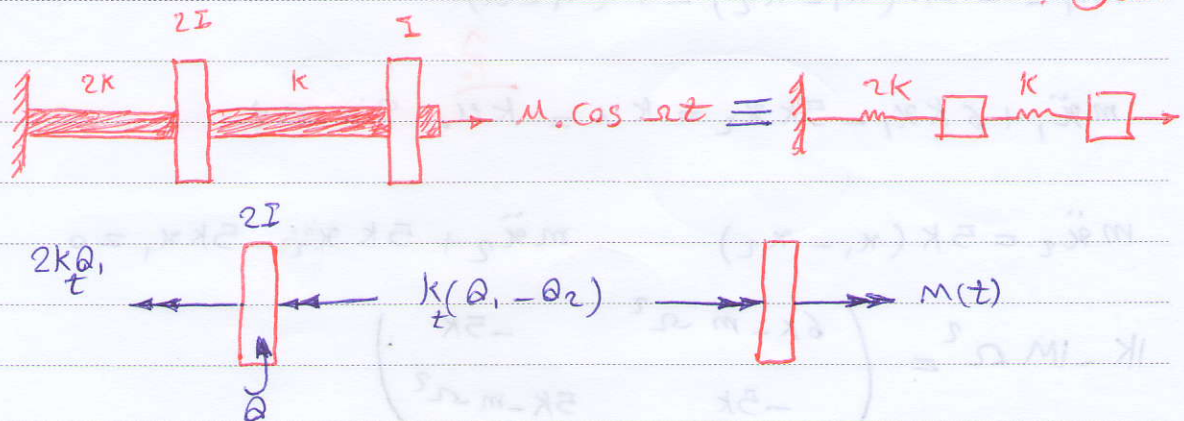
$$\hat{x}_{p2} = \frac{5k^2}{-25k^2} u_0 = \frac{u_0}{5}$$

در مثال (1k-m و 5k-m) و در صورتی که $5k - m\omega^2 = 0$ است به دست می آید:

$$\hat{x}_{p2} = \frac{5k \cdot k u_0}{\det}$$

برای تغییرات سیستم دو به دست می آید.

مثال:



$$2I\ddot{\theta}_1 = -2k_t \theta_1 - k_t (\theta_1 - \theta_2)$$

$$2I\ddot{\theta}_1 + 3k_t \theta_1 - k_t \theta_2 = 0$$

$$I\ddot{\theta}_2 = k_t (\theta_1 - \theta_2) + M \cos \omega t$$

$$I\ddot{\theta}_2 + k_t \theta_2 - k_t \theta_1 = M_0 \cos \omega t$$

$$\begin{bmatrix} 2I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k_t & -k_t \\ -k_t & k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M(t) \end{bmatrix}$$

(119)

Subject:

Year:

Month:

Date: ()

$$\det \begin{pmatrix} 3k_t - 2I\omega^2 & -k_t \\ -k_t & k_t - I\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\hat{\theta}_p = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{p1} \\ \hat{\theta}_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k - 2I\omega^2 & -k_t \\ -k_t & k - I\omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ M_0 \end{bmatrix}$$

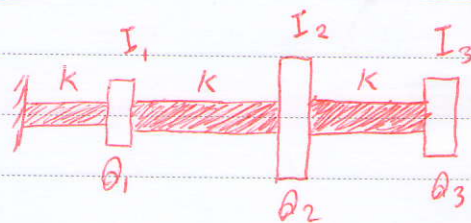
$$T = \frac{1}{2} 2I \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}_2^2$$

طیرش کا راتر:

$$V = \frac{1}{2} 2k_t \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_t (\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$W = M(t) \theta_2$$

$$q_1 = \theta_1, \quad q_2 = \theta_2$$



$$I_1 \ddot{\theta}_1 = -k\theta_1 - k(\theta_1 - \theta_2)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = k(\theta_1 - \theta_2) - k(\theta_2 - \theta_3)$$

$$I_3 \ddot{\theta}_3 = k(\theta_2 - \theta_3)$$

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + 2k\theta_1 - k\theta_2 = 0$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + 2k\theta_2 - k\theta_1 - k\theta_3 = 0$$

$$I_3 \ddot{\theta}_3 + k\theta_3 - k\theta_2 = 0$$

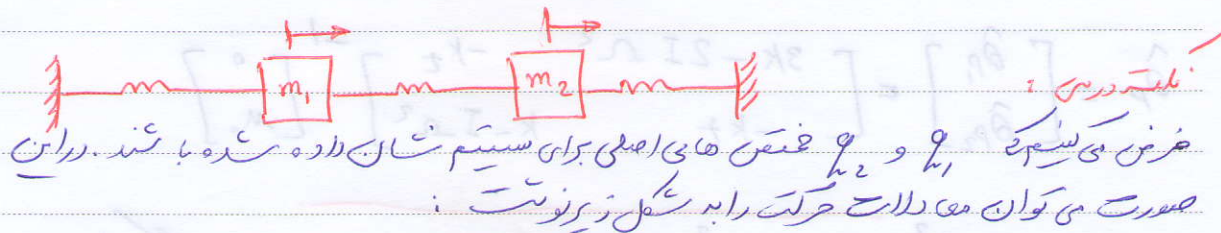
سیستم کے سبب برقرار مساوی

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

P4PCO

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

ماتریس جرمی ها:



$$m_{11} \ddot{q}_1 + k q_1 = 0 \Rightarrow q_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$m_{22} \ddot{q}_2 + k q_2 = 0 \Rightarrow q_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$X = h_1 q_1(t) + h_2 q_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} q_1 + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

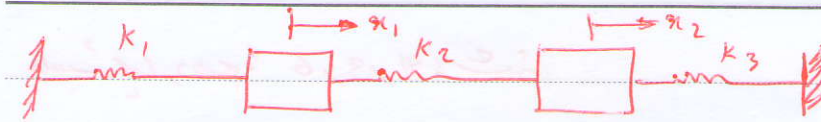
H ماتریس مود که متغیر از سونهای ۲ بردار مود را تشکیل می‌دهد.

$$X = H q_2 \quad q_2 = H^{-1} X \quad \text{ستون اول بردار مود اول و ستون دوم بردار مود دوم}$$

(i2)

Subject:

Year. Month. Date. ()



$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow H = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{x_1 - x_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad q_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

$$m \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \quad (1)$$

$$m \ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow m(\underbrace{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}_{2\ddot{q}_1}) + 2k(\underbrace{x_1 + x_2}_{2q_1}) - k(\underbrace{x_1 + x_2}_{2q_1}) = 0$$

$$\boxed{m \ddot{q}_1 + kq_1 = 0 \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m}}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow m(\underbrace{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2}_{2\ddot{q}_2}) + 2k(\underbrace{x_1 - x_2}_{2q_2}) + k(\underbrace{x_1 - x_2}_{2q_2}) = 0$$

$$\boxed{m \ddot{q}_2 + 3kq_2 = 0 \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{m}}$$

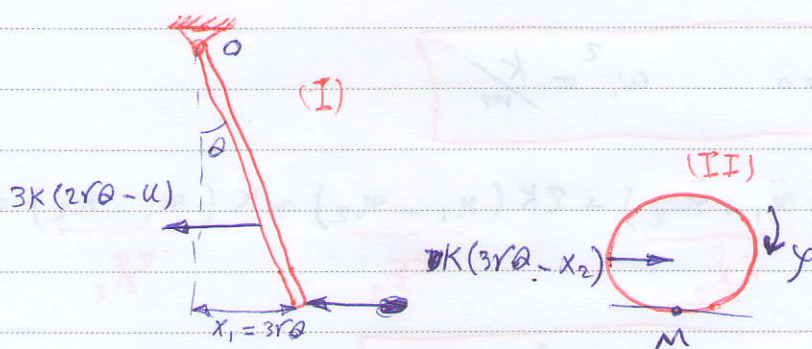
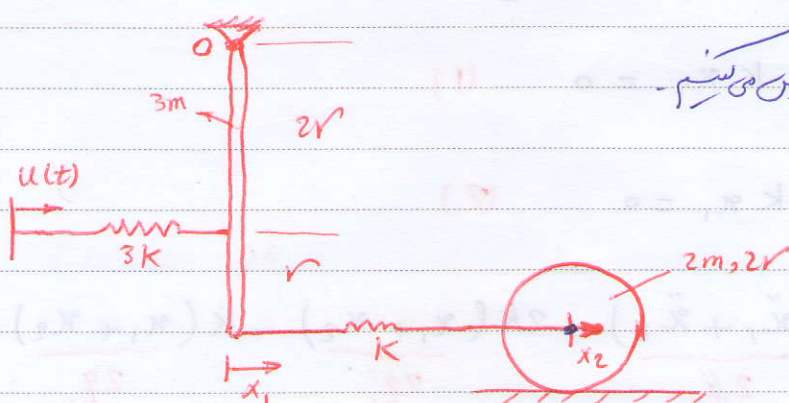
P4PCO

حسبه چهاردهم؛ 6 ر 3 و 9؛ عبه

مسئله: میله باریک و یکپارچه به جرم $3m$ می تواند آزادانه حول O دوران کند. انتهای میله مطابق شکل بوسیله قتر باریک استوانه (جرم $2m$ ، شعاع $2r$) وصل می شود. فزیدگی در فاصله $2r$ از نقطه A و نیز به میله متصل است که سر دیگر آن بر اساس رابطه $u(t) = u_0 \sin \omega t$ جابجایی می گردد. سیستم را به نوسان واکه دارد. معادله دیفرانسیل حرکت را بر حسب x_1 جابجایی انتهای میله ($x_1 = 3r\theta$)، زاویه میله نسبت به عمود (x_2 بدست آورید و معادله ها و بردارهای مورد نیاز تعیین کنید. دامنه جابجایی سیستم ($\hat{x}_1$ و $\hat{x}_2$) را بدیابید. از اثر وزن میله چشم پوشی شود.

روش نیوتن اولیه

سیستم را طی به سمت راست فرض می کنیم.



$$x_1 = 3r\theta$$

$$r\theta = \frac{x_1}{3}$$

$$I_M = \frac{3}{2} 2m (2r)^2$$

$$I_M = 12mr^2$$

$$(I) \quad I_O \ddot{\theta} = (\sum M)_O$$

$$I_O = \frac{1}{3} 3m (3r)^2 = 9mr^2$$

$$9mr^2 \ddot{\theta} = -3k(2r\theta - u)2r - k(3r\theta - x_2)3r$$

$$9mr^2 \frac{\ddot{x}_1}{3r^2} = -3k\left(\frac{4}{3}x_1\right) + 6ku - 3kx_1 + 3kx_2$$

$$3m\ddot{x}_1 + 7kx_1 - 3kx_2 = 6ku \sin \omega t \quad (I)$$

رابطه هم‌رابطی مرکز آبی توان می‌نویسیم: $I_M \ddot{\theta} = (\sum M)_M = k(x_1 - x_2) \cdot 2r$

$$12mr^2 \frac{\ddot{x}_2}{2r \cdot 2r} = kx_1 - kx_2$$

$$x_2 = 2ry$$

$$3m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \quad (II)$$

برای بدست آوردن فرکانس‌ها سمت راست و چپ را تقریباً می‌گیریم:
برای می‌سب فرکانس‌های زاویه‌ای از به استفاده می‌کنیم:

$$\det(K - M\omega^2) = \det \begin{pmatrix} 7k - 3m\omega^2 & -3k \\ -k & k - 3m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

بردارهای مورد: $(1K - 1M\omega^2) \hat{X} = 0$

$$\begin{pmatrix} 7K - 3m\omega^2 & -3K \\ -K & K - 3m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1} = \frac{7K - 3m\omega^2}{3K} = \frac{K}{K - 3m\omega^2}$$

$$\begin{aligned} (7K - 3m\omega^2) \hat{X}_1 - 3K \hat{X}_2 &= 0 \\ (7K - 3m\omega^2) \hat{X}_1 &= 3K \hat{X}_2 \end{aligned}$$

از هر یک از تساوی ها استفاده کنیم به جواب
ی رسیدیم در واقع یکی را بنویسیم ثابت می کنند

$$-K \hat{X}_1 + (K - 3m\omega^2) \hat{X}_2 = 0$$

اگر با جایگزینی ω_1 و ω_2 می توان h_1 و h_2 را بدست آورد.

دامنه های دینامیکی حرکت: برای سبب این حالت از Ω استفاده می کنیم. (مقدار عدد)

$$\hat{X}_p = (K - M\Omega^2)^{-1} \hat{F} = \frac{1}{\det(K - M\Omega^2)} \hat{F}$$

$$= \frac{1}{\det(K - M\Omega^2)} \begin{pmatrix} k - 3m\Omega^2 & 3k \\ k & 7k - 3m\Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6k u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}_p = \frac{(k - 3m\Omega^2) 6k u_0}{\det(K - M\Omega^2)}$$

از معادلات ریاضی حرکت

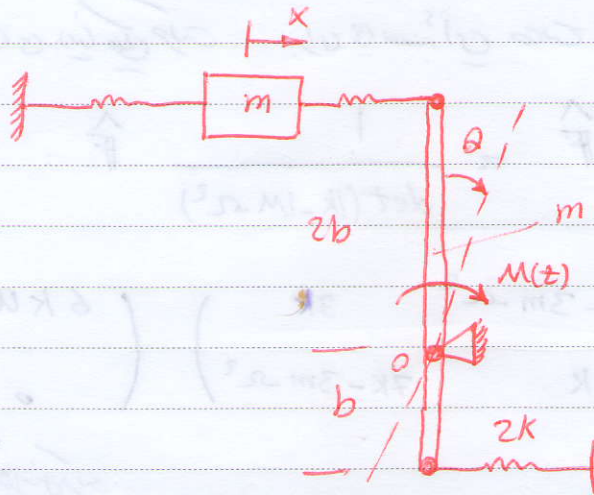
$$\hat{X}_{p2} = \frac{6k^2 u_0}{\det(K - M\Omega^2)}$$

$$\hat{X}_p = 0 \quad k - 3m\Omega^2 = 0 \quad \Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{3m}}$$

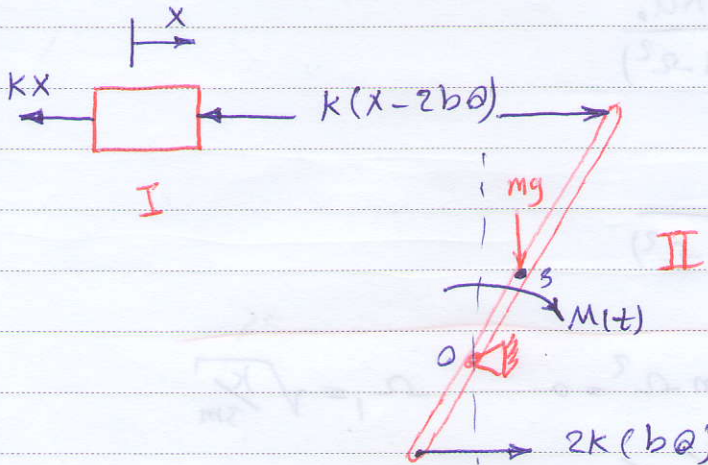
در این Ω ، اگر x_1 را به دست آوریم فقط x_2 و $\dot{x}_2$ حرکت می کنند و برای این خطا:

$$\det(K - M\Omega_1^2) = -3k^2 \Rightarrow \hat{X}_{p2} = \frac{6k^2 u_0}{-3k^2} = -2u_0$$

مثلاً: $M(t) = M_0 \sin \Omega t$ میله را در این به نوسان حول نقطه 0 می گذاریم و در نتیجه سیستم نوسان خواهد داشت. انجام می دهیم به روش انتگرال می گیریم (اولی و ب) تا آنرا از معادلات دینامیکی حرکت را بدست آوریم؟
(ج) دامنه های دینامیکی پاسخ غیر همگن $(\hat{X}_p, \hat{Q}_p)$ را بدست آورده از وزن میله سیستم پویایی می گیریم.



فرض می کنیم میله و جرم m به سمت راست آمده اند. با توجه به این فرض را گرام آزاد را می کنیم می کنیم:



اگر از اثر نیروی وزن صرف نظر می کنیم باید در این حالت نیروی وزن را وارد نمی کردیم.

فعلاً m را لحاظ می کنیم ببینیم چه تغییری در روابط بدست می آید.

$$I: m\ddot{x} = -kx - k(x - 2b\theta)$$

چون جرم x می نویسیم می بینیم x ها در یک راست متغی شدند که وقتی یک جرم به روند مثبت می شوند.

$$m\ddot{x} + 2kx - 2kb\theta = 0 \quad I$$

$$I_0 \ddot{\theta} = (\sum M)_0$$

$$I_0 = I_s + m \bar{OS}^2 = \frac{1}{12} m (3b)^2 + m \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

(فرض دومه است در طرف راست متغی است)

$$I_0 = mb^2$$

$$mb^2 \ddot{\theta} = k(x - 2b\theta)2b - 2kb\theta^2 + mg \frac{b}{2} \sin \theta + M(t)$$

$$mb^2 \ddot{\theta} + (6kb^2 - mg \frac{b}{2}) \theta - 2kbx = M(t) = M_0 \sin \omega t$$

با صرف نظر کردن از اثر نیروی وزن داریم:

$$(mb^2) \ddot{\theta} + (6kb^2) \theta - (2kb)x = M_0 \sin \omega t \quad II$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$$

شکل ماتریس معادله دیفرانسیل حرکت:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mb^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -2kb \\ -2kb & 6kb^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_0 \sin \omega t \end{bmatrix}$$

$$\det(K - M\omega^2) = 0 \quad I$$

برای رسیدن به فرکانس:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -2kb \\ -2kb & 6kb^2 - mb^2\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -2kb \\ -2kb & 6kb^2 - mb^2\omega^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(K - M\omega^2)} \begin{pmatrix} 6kb^2 - mb^2\omega^2 & 2kb \\ 2kb & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}_p = \begin{bmatrix} \hat{x}_p \\ \hat{\theta}_p \end{bmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} 6kb^2 - mb^2\omega^2 & 2kb \\ 2kb & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M_0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}_p = \frac{2kb M_0}{\det}, \quad \hat{\theta}_p = \frac{(2k - m\omega^2) M_0}{\det}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2$$

روش لاگرانژ: انرژی جنبشی

$$V = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k (x - 2b\theta)^2 + \frac{1}{2} 2k (b^2 \theta^2)$$

$$W = M(t) \cdot \theta$$

$$q_1 = x, \quad q_2 = \theta$$

چون از این نیروی وزن
صرف نظر کردیم انرژی
پتانسیل صفر را نیاموردم.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = Q_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}) + (kx + k(1)(x - 2b\theta)) = 0$$

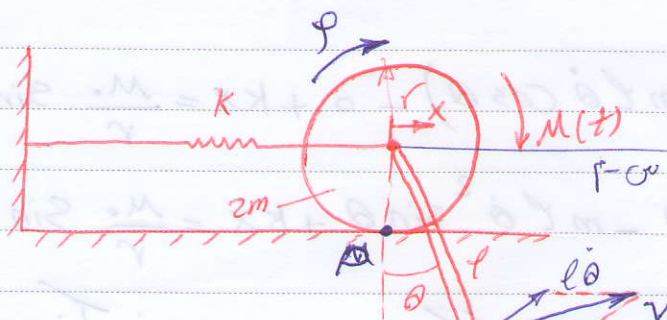
$$m \ddot{x} + 2kx - 2kb\theta = 0 \quad I$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} = Q_2$$

$$\frac{d}{dt} (I_0 \dot{\theta}) + (k(-2b)(x - 2b\theta)) + 2kb^2 \theta = M(t)$$

$$mb^2 \ddot{\theta} + 6kb^2 \theta - 2kbx = M_0 \sin \omega t \quad II$$

مثلاً: اگر $M(t) = M_0 \sin \omega t$ بردیم وارد می شود و سیستم دارای نوسان
و اطراف می شود. به روش لاگرانژ معادلات حرکت را بر حسب x و θ بدست آوریم و
آنهارا خطی بنویسیم. دامنه های حرکت را برای حالت های خاص تعیین کنید. برای چه مقادیری
در حالت سکون باقی می ماند؟



مختص: برای جایابی مرکز دایره
و دیگر ه است.
حالت دایره را غلشی در نظر
بیاییم.

$$T = \frac{1}{2} I_p \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

چون مرکز جرم دایره دارای سرعت
است سرعت ذره را بدین شکل نوشتیم.

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta)$$

$$v^2 = (\dot{x})^2 + (l \dot{\theta})^2 + 2 \dot{x} \cdot l \dot{\theta} \cdot \cos \theta$$

$$q_1 = x, \quad q_2 = \theta$$

می بینیم انرژی جنبشی وابستگی کامل به سرعت ندارد بلکه به هم بستگی دارد. راین حالت باید از رابطه اصلی لاگرانژ استفاده کرد.

$$V = \frac{1}{2} k x^2 - m g l \cos \theta, \quad W = M_0(t) \cdot \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{M_0}{r} x \sin \omega t$$

انرژی پتانسیل فقط تابع جایابی است.

روابط لاگرانژ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) = Q_k$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}$$

مشتق جزئی بر حسب $\dot{x}$

$$\frac{d}{dt} (3m\dot{x} + m\dot{x} + m\ell\dot{\theta}\cos\theta) - 0 + kx = \frac{M_0}{r} \sin \omega t$$

$$4m\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta + kx = \frac{M_0}{r} \sin \omega t$$

مشتق زمانی

اینجا باید فقط کنیم: چون θ خیلی کوچک است $\cos\theta = 1$ و $\sin\theta = 0$ و $\dot{\theta}^2$ باز هم رابط را غیر خطی می‌کشد به همین خاطر از این رابط را به دور می‌کنیم. چون θ کوچک است و به توان 2 می‌رسد کوچکتر می‌شود.

نکته: هر چیزی که باعث غیر خطی شدن معادله می‌شود را باید حذف نمود. بنابراین $\ddot{\theta}^2$:

$$4m\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} + kx = \frac{M_0}{r} \sin \omega t$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m\ell\dot{\theta} + m\ell\dot{x}\cos\theta) - (-m\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta) + mg\ell\sin\theta = 0$$

$$m\ell\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x}\cos\theta - m\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + m\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mg\ell\sin\theta = 0$$

$$m\ell\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x}\cos\theta + mg\ell\sin\theta = 0$$

$$m\ell\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x} + mg\ell\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

اگر $\tilde{x} = 0$ (تنفس از ثابت ه شود)

$$x_0 = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix}$$

شکل ماتریس معادلات دیفرانسیل حرکت:

$$\begin{bmatrix} 4m & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{x}} \\ \ddot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|k - m\omega^2| = \begin{pmatrix} k - 4m\omega^2 & -ml\omega^2 \\ -ml\omega^2 & mgl - ml^2\omega^2 \end{pmatrix}$$

حلبه با نردهم؛ 10، 3، 9؛ چهارشنبه

مسئله: ماشین به وزن (450 kg) روی جفت فنر موازی با تغییر مکان (استاتیکی) برای (5 mm) قرار دارد. اگر با نیروی دورانی در راستای معادل $m_e = 0.23 \text{ kg.m}$ باشد:

الف) دامنه نیرو

ب) دامنه ارتعاش منتقله به زمین در دور 1200 rpm

ج) اگر چرخه ماشین ابتدا در یک بکتر بین به وزن (1140 kg) بطور صلب بسته و پس مجموعه ای که روی همان فنر قرار داده شود، دامنه نیروی منتقله و دامنه ارتعاش ماشین را بدین آورید:

د) اگر چرخه این بار مجموعه روی فنرهای قوی تر قرار داده می شد بطوری که تغییر مکان استاتیکی همان (5 mm) گردد، دامنه نیروی منتقله و دامنه ارتعاش در این حالت چه قدر است؟

$$w = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}} = \sqrt{\frac{9.81}{0.005}} = 44.29$$

$$\Omega = 1200 \frac{\text{rev}}{\text{min}} = 1200 \frac{\pi}{30} = 125.66 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\eta = \frac{\Omega}{w} = 2.83$$

$$T_R = \sqrt{\frac{1 + 4D^2\eta^2}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \Big|_1 \Rightarrow \text{دارای میرایی}$$

$$T_R = \left| \frac{1}{1-\eta^2} \right| = \frac{1}{\eta^2-1} = 0.142 \rightarrow \text{بدون میرایی}$$

$$F_0 = m_e \Omega^2 = 0.23 (125.66)^2 = 3631.8 \text{ N}$$

$$\hat{F}_d = F_0 T_R = 3631.8 \times 0.142 = 515.71 \text{ N}$$

$$\hat{X}_p = \frac{F_0}{K} \alpha(D, \eta) = \frac{F_0}{K} \left| \frac{1}{1-\eta^2} \right| = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\eta^2-1} \quad (-)$$

$$\frac{K}{m} = \omega^2 \Rightarrow \hat{X}_p = \frac{F_0}{m\omega^2} \frac{1}{\eta^2-1}$$

(ج) در این حالت تنها چیزی که تغییر کرده ضرب می باشد و چند بار است در مسئله تغییر خواهد کرد

$$\omega_1 = 44.29 = \sqrt{\frac{K}{m_1}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m_2}}$$

$$m_1 = 450 \text{ kg}$$

$$m_2 = 1590 \text{ kg}$$

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) = \omega_2 = \checkmark \quad \eta_2 = \frac{\omega}{\omega_2}$$

$$(\hat{F}_d)_2 = F_0 \frac{1}{\eta_2^2-1} = \checkmark$$

$$\hat{X}_p = \frac{F_0}{m_2 \omega_2^2} \frac{1}{\eta_2^2-1} = \checkmark$$

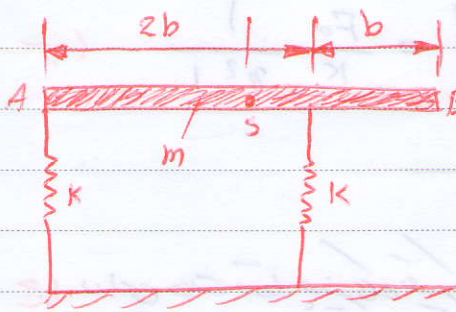
(د) دانسته می شود که تغییراتی که می کند:

$$\frac{F_0}{K} \frac{1}{\eta^2-1} = \frac{F_0}{m_2 \omega_1^2} \frac{1}{\eta^2-1}$$

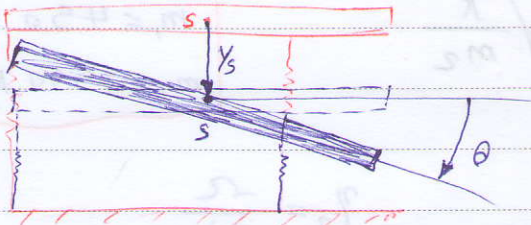
در این قسمت فقط تغییرات داریم:

$$TR = \frac{1}{\eta^2-1} \quad \text{و} \quad F_0 = m \omega^2$$

بدون تغییر خواهد ماند:



مسئله: معادلات حرکت سیستم را به روش نیوتن اولی (انف) نسبت به جابجایی مرکز جرم و چرخش حول آن (ب) نسبت به جابجایی نقطه A و چرخش حول آن بدست آورده و (ج) فرکانس های طبیعی و بردارهای مورد را تعیین کنید.



$$m\ddot{x}_s = -F_1 - F_2$$

$$m\ddot{x}_s = -K(y_s - \frac{3}{2}b\theta) - 3K(y_s + \frac{1}{2}b\theta)$$

$$m\ddot{y}_s + 4Ky_s = 0$$

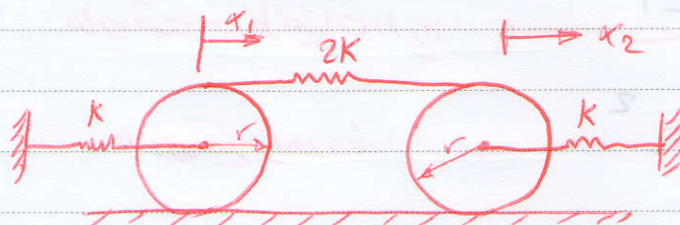
$$I_s\ddot{\theta} = (\sum M)_s = F_1 \cdot \frac{3b}{2} - F_2 \cdot \frac{b}{2} =$$

$$= K(y_s - \frac{3}{2}b\theta) \frac{3b}{2} - 3K(y_s + \frac{b}{2}\theta) \frac{b}{2}$$

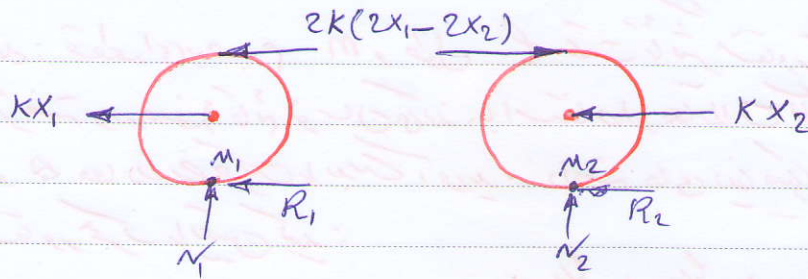
$$I_s\ddot{\theta} + 3Kb^2\theta = 0$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{3Kb^2}{I_s}}$$

مسئله: با فرض غلشی بودن حرکت دو سیل متب همگردد به جرم m، با استفاده از روش نیوتن اولی و انرژی معادلات دینامیک حرکت را بر حسب مختصات x_1 ، x_2 بدست



آورده شکل فاکتور آنرا بنویسید. فرکانس ها و بردارهای مورد تعیین کنید. x_1 و x_2 جابجایی مرکز جرم ها باشند.



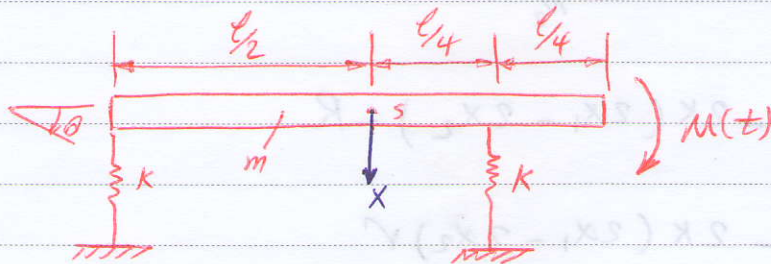
روش نیوتن - اولی

$$m\ddot{x}_s = m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - 2K(2x_1 - 2x_2) - R$$

$$I_s \ddot{\theta}_1 = (\sum M)_s = R_1 r - 2K(2x_1 - 2x_2) r$$

$$I_{m_1} \ddot{\theta}_1 = (\sum M)_{m_1}$$

سند: قطعه‌ای به جرم m و طول l تحت تأثیر شتاب $M(t) = M_0 \sin \Omega t$ قرار گرفته و در صفحه قائم نوسان می‌کند. با استفاده از معادلات لاگرانژ و بر حسب مختصات x و θ معادلات حرکت را بدست آورید. دامنه‌های نیامی $(\hat{x}_p, \hat{\theta}_p)$ حاصل از شتاب و محرک را تعیین کنید.



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_s \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k \left(x - \frac{l}{2} \theta\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(x + \frac{l}{4} \theta\right)^2$$

$$W = M(t) \cdot \theta = M_0 \sin \Omega t$$

$$q_1 = x \quad q_2 = \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_x} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_1 = \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}) + \left[k \left(x - \frac{l}{2} \theta\right) + k \left(x + \frac{l}{4} \theta\right) \right]$$

$$\boxed{m \ddot{x} + 2kx - k \frac{l}{4} \theta = 0} \quad I$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_2 = \frac{\partial W}{\partial \theta} = M(t)$$

$$\frac{d}{dt} (I_s \dot{\theta}) + \left[k \left(-\frac{l}{2}\right) \left(x - \frac{l}{2} \theta\right) + k \left(\frac{l}{4}\right) \left(x + \frac{l}{4} \theta\right) \right] = M(t)$$

(137)

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\left[\frac{1}{12} m \ell^2 \ddot{\theta} + \frac{5}{16} k \ell^2 \theta - k \frac{\ell}{4} x = M(t) \right] \quad \text{II}$$

$$(1K - 1M\omega^2)^{-1} =$$

$$\hat{x}_p = (1K - 1M\omega^2)^{-1} \hat{F}_0$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ \theta_p \end{pmatrix} = (1K - 1M\omega^2)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ M_0 \end{pmatrix}$$

PAPCO