

ارتعاشات آزاد سیستم جرم و فنر

هدف: بررسی ارتعاشات سیستم جرم و فنر با یک درجه آزادی و بدست آوردن پریود نوسان

مقدمه

در سیستم های دنیا مکی که جسم قابلیت کسب یا از دست دادن انرژی را داراست، نوسان به وجود می آید که به آن ارتعاش می گویند. ارتعاش در ساده ترین شکل به صورت حرکت نوسانی تعریف می شود. ارتعاشات را می توان به طرق مختلف دسته بندی کرد.

ارتعاش آزاد بدون اعمال نیروهای خارجی صورت می پذیرد. معمولاً ارتعاش آزاد هنگامی صورت می گیرد که یک سیستم کشسان جابجاشده یا سرعت اولیه ای به آن داده شود.

ارتعاش اجباری اغلب توسط نیروهای خارجی اعمال می شوند.

اگر در حرکت سیستم، انرژی تلف نشود، ارتعاش به وجود آمده را ارتعاش آزاد نامید می نامند و اگر دارای میرایی باشد، انرژی سیستم به تدریج کم می شود که در این صورت نوسان را ارتعاش آزاد میرا گویند.

تئوری آزمایش

ساده ترین مدل یک سیستم مکانیکی ارتعاشی از یک جرم و یک فنر خطی بدون میرایی تشکیل شده است که فقط در راستای قائم دارای حرکت باشد. حرکت سیستم را می توان با یک ضربه $x(t)$ یعنی با یک درجه آزادی نشان داد. چنانچه فنر تحت نیروی F کشیده شده باشد فنر را کشسان نامند.

شیب منحنی نیرو بر حسب جابه جایی برابر ثابت فنر k می باشد.

در این صورت نیروی فنر برابر خواهد بود با:

$$F = kx$$

اگر جرم m باعث شود طول آزاد فنر به اندازه δ_{st} جابه جاشود و سیستم را به وضعیت تعادل استاتیکی درآورد، در این صورت نیروی فنر برابر با وزن جرم m در وضعیت تعادل استاتیکی می شود:

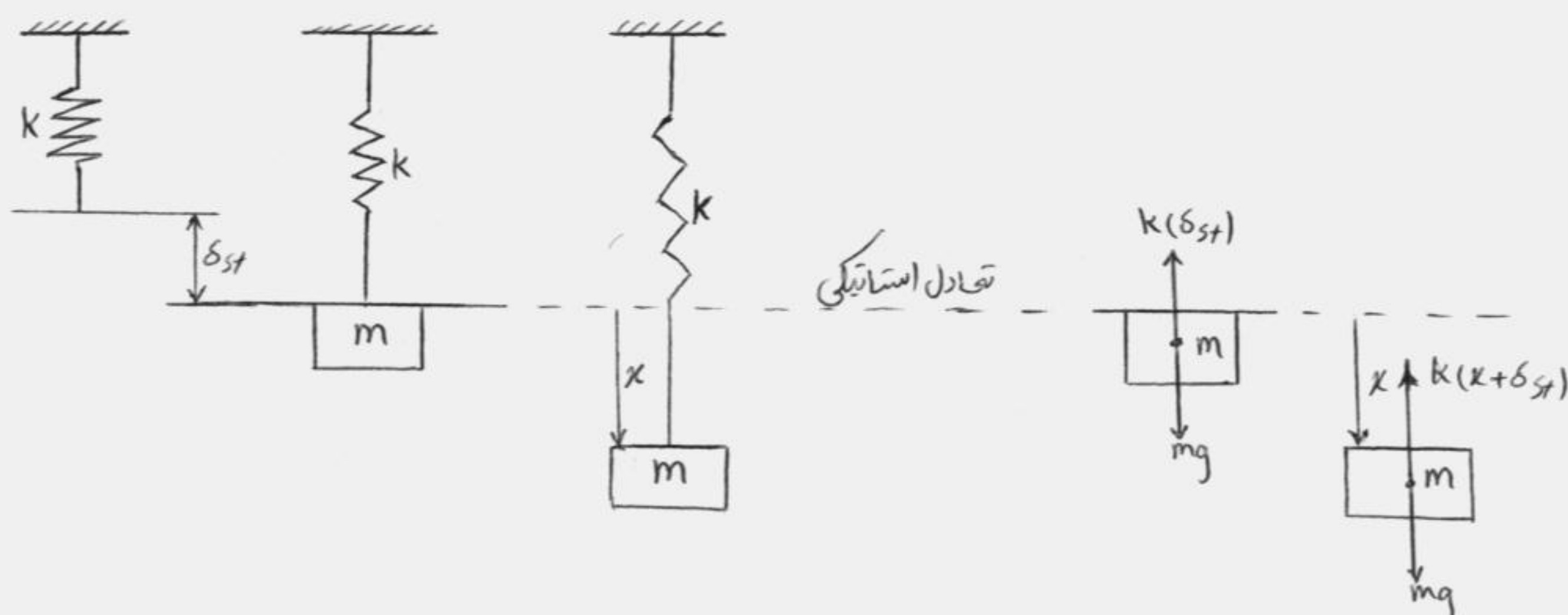
$$k \delta_{st} = mg \quad (1)$$

حال اگر جرم از وضعیت تعادل استاتیکی به اندازه x جابه جاشود، با استفاده از قانون دوم نیوتن

$$\Sigma F = m\ddot{x} \quad \text{بر حسب تنها متغیر } x \text{ می توان نوشت:} \quad (2) \quad -k(x + \delta_{st}) + mg = m\ddot{x}$$

با در نظر گرفتن رابطه (1)، رابطه (2) به صورت زیر نوشته می شود:

$$-kx = m\ddot{x}$$



واضح است که انتخاب وضعیت تعادل استاتیکی به عنوان مرجع x کمیت mg نیروی ناشی از ثقل و

نیروی استاتیکی $k\delta_{st}$ فنر را از معادله حرکت حذف کرده است و نیروی برآیند موثر جرم m فقط

نیروی فنر است که ناشی از تغییر مکان x از وضعیت تعادل استاتیکی می باشد.

بنابراین معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی بدون میرا کننده به صورت زیر درمی آید.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3)$$

که در آن x جابه جایی از وضعیت تعادل استاتیکی، m جرم، k سفتی فنر و $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ شتاب جرم می باشد.

اگر رابطه (۳) را بر m تقسیم کرده و به جای $\frac{k}{m} = \omega_n^2$ قرار دهیم، فوایم داشت:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (۴)$$

که در آن ω_n ثابت و مثبت است.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

برای حل معادله دیفرانسیل (۴) می توان پاسخ را به صورت هارمونیک در نظر گرفته و نوشت:

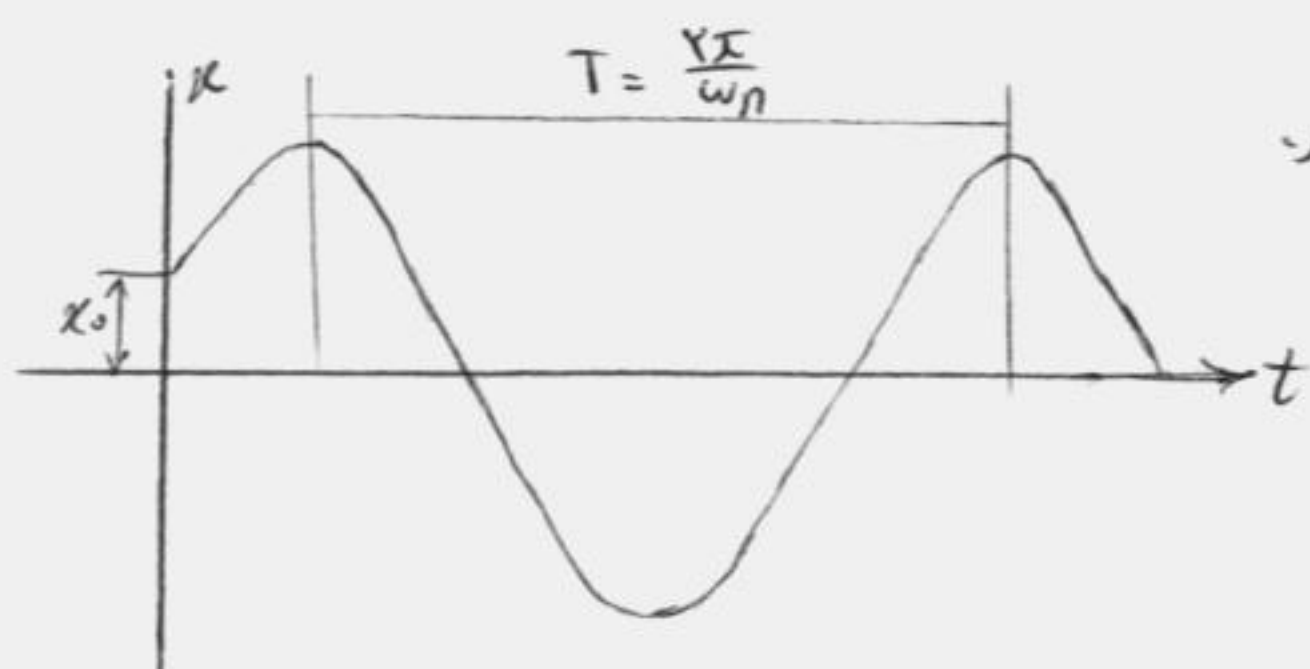
$$x = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (۵)$$

که در آن A_1 و A_2 مقادیر ثابت هستند که از شرایط اولیه $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ بدست می آیند. رابطه (۵) را

$$x = A \sin (\omega_n t + \phi)$$

می توان به صورت زیر نمایش داد:

در بالا $A_1 = x_0$ و $A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$ و $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ دامنه و $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)$ زاویه فاز حرکت می باشند.



خزگانش طبیعی سیستم ω_n بر حسب $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ می باشد.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

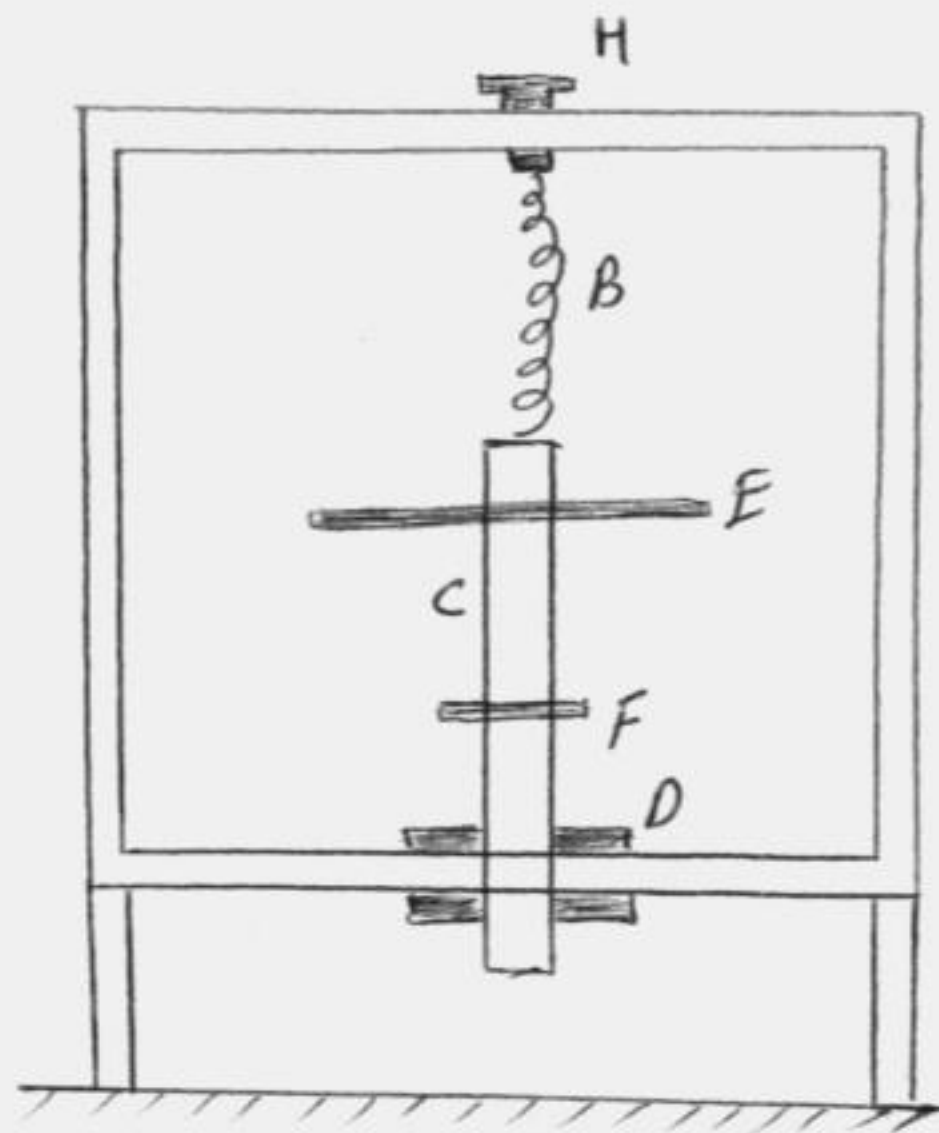
شرح دستگاه

دستگاه از یک فنر مارپیچ B تشکیل شده است که از بالا توسط دستگاه H به قاب A وصل شده است و

در پایین به میله C وصل می شود. حرکت میله C به علت وجود راهنمای D فقط دارای یک درجه

آزادی است. بر روی میله C دو صفت مسدود E و F تعبیه شده که از صفت F برافزودن

وزن به دستگاه و از صفت E برای اندازه گیری افزایش طول استفاده می شود.



روش انجام آزمایش

پس از تر از نمودن سیستم یکی از فنرها را به قاب متصل کرده و میلۀ C را به آن می آوریم و با افزودن وزنه های مختلف به فنر تغییر طول آن را اندازه گرفته و ثبت می کنیم. مقدار این وزنه از ۴۰۰gr تا ۳۰۰gr می باشد.

شروع و با افزودن هر باره ۴۰۰gr تا ۳۰۰gr ادامه می دهیم.

طی این مدت در هر بار مقدار δ ثبت می شود. با اندازه گیری زمان مثلاً ۲۰ رفت و برگشت می توان پریود تجربی نوسانات را بدست آوریم. اگر زمان ثبت نوسان برابر t_d باشد زمان یا پریود

تجربی نوسان برابر $\frac{t_d}{4}$ خواهد بود. پس از محاسبه ی پریود یک نوسان از راه تجربی می توانیم

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta}{g}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{همین پریود را از نظر تئوری نیز بدست آوریم.}$$

جدول مربوط به محاسبات پریود تجربی و پریود تئوری در صفحه ی بعد آمده است.

$$k = 1 \frac{N}{mm} = 1000 \frac{N}{m} \quad \text{خرفن شده است.}$$

جرم وزنه m (kg)	تغییر طول δ (mm)	زمان ۲۰ نوسان (s)	T تئوری	$k = \frac{mg}{\delta}$ (N/m)	تجربی $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$	درصد خطا
۰٫۴	۲۵۴	۵٫۹۷	۰٫۲۹۸	۹۸۱	۰٫۱۲۲	۵۷٪
۰٫۸	۲۵۷	۵٫۷۸	۰٫۲۸۹	۱۱۲۱	۰٫۱۲۸	۴۱٪
۱٫۲	۲۴۲	۹٫۴۴	۰٫۳۳۳	۹۸۱	۰٫۲۱۹	۳۴٪
۱٫۴	۲۴۴	۹٫۸۷	۰٫۳۴	۹۸۱	۰٫۲۵۳	۲۵٪
۲	۲۷۰	۷٫۴۳	۰٫۳۸۱	۹۸۱	۰٫۲۸۳	۲۵٪
۲٫۴	۲۷۵	۸٫۰۲	۰٫۴۰۱	۹۴۱	۰٫۳۱۷	۲۰٪
۲٫۸	۲۸۰	۸٫۱۴	۰٫۴۲	۹۱۵٫۶	۰٫۳۴۷	۱۷٪
۳٫۲	۲۸۴	۸٫۱۴	۰٫۴۳	۹۲۳	۰٫۳۷۰	۱۴٪

در جدول بالا فاصله‌ی اولیه ۲۵۰ mm می باشد و از این طول به بعد می باشد که جزئیات تغییرات δ می باشد.

$$\text{درصد خطا} = \left| \frac{\text{عملی} - \text{تئوری}}{\text{تئوری}} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{۰٫۲۹۸ - ۰٫۱۲۲}{۰٫۲۹۸} \right| \times 100 = ۵۷\%$$

کاربرد

دزیر گستره‌ای معمولی ارتعاشات آزاد که در کاربردهای مختلف علمی و صنعتی با آنها مواجه می‌شویم را ذکر می‌کنیم.

۱- ارتعاشات اتمی با فرکانس 10^{12} هرتز و دامنه 10^{-8} - 10^{-4} میلی‌متر

۲- ریز لرزه‌های پوسته زمین با فرکانس ۱-۱۰۰ هرتز و دامنه 10^{-5} - 10^{-3} میلی‌متر

۳- ارتعاشات ماشین‌آلات و ساختمان‌ها با فرکانس ۱۰-۱۰۰ هرتز و دامنه ۱-۱۰۰ میلی‌متر

۴- نوسانات جابجایی ساختمان‌های بلند با فرکانس ۵-۱۰۰ هرتز و دامنه ۱۰-۱۰۰۰ میلی‌متر

۵- کاهش ارتعاشات صندلی هیلکوپتر

صندلی یک بالگرد همراه با خلبان به وزن ۱۰۰۰ N و دارای تغییر مکان استاتیکی $Dst = 10\text{ mm}$ است. ارتعاشات

هارمونیک سطح بالگرد، با دامنه 2 mm و با فرکانس 4 Hz ، به پایه صندلی منتقل می‌شود. ابتدا

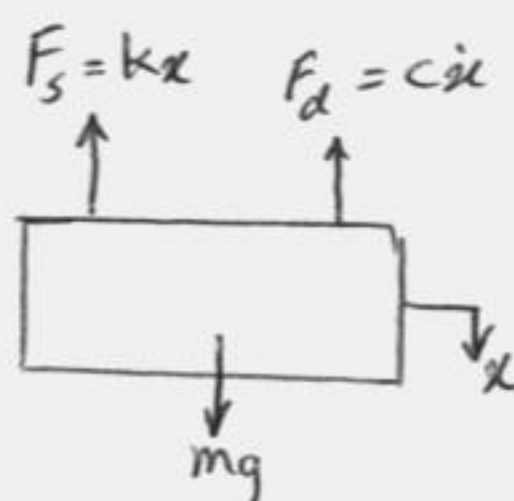
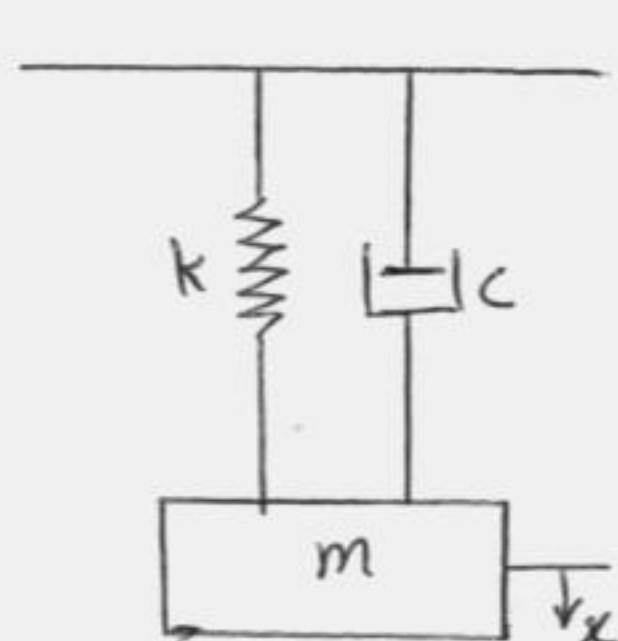
باید دانست خلبان چه میزان ارتعاشات را تحمل می‌کند سپس برای کاهش ارتعاشات، طرح صندلی را

طراحی کرد که برای این کار صندلی را به صورت یک سیستم نامیاد با یک درجه آزادی در تقویم گیرند و

محارلات آن را حل می‌کنند.

حل مسائل

رابطه‌ی پروردنوسان برای یک سیستم جرم و فنر همراه با یک مستطک کننده و سیکوز (دیسک)



$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

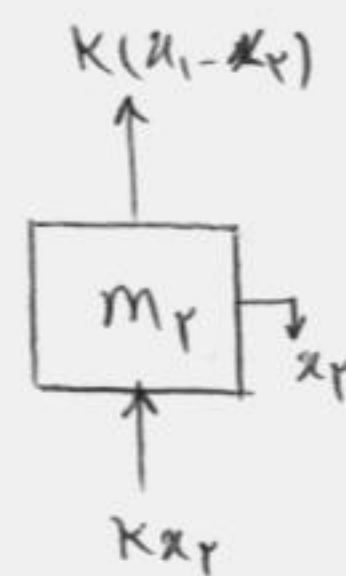
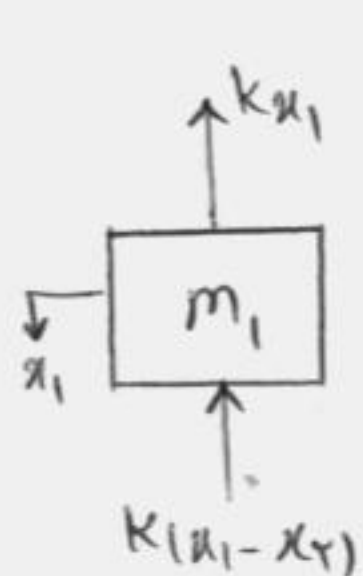
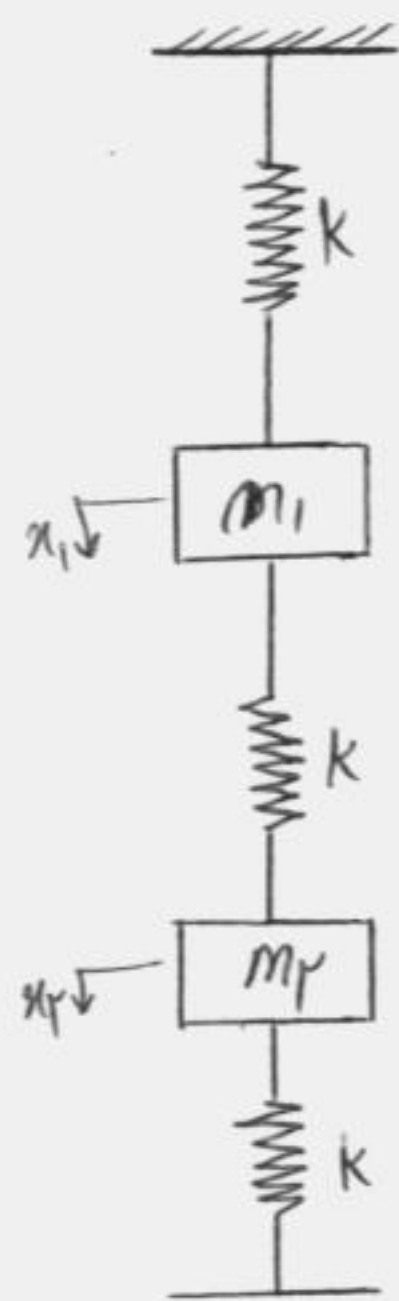
$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$D^2x + \frac{c}{m}Dx + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ D^2 + \frac{k}{m} + \frac{c}{m}D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \\ D_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$x(t) = e^{(-\frac{c}{2m})t} \left(c_1 e^{-\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}t} + c_2 e^{\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}t} \right)$$

پروردنوسان را برای یک سیستم جرم و فنر با ورودی آزادی بدست آورید.



$$\begin{cases} -kx_1 + k(x_2 - x_1) = m_1\ddot{x}_1 \\ -kx_2 + k(x_2 - x_1) = m_2\ddot{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \sin \omega t \\ x_2 = X_2 \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega^2 X_1 \sin \omega t \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 X_2 \sin \omega t \end{cases}$$

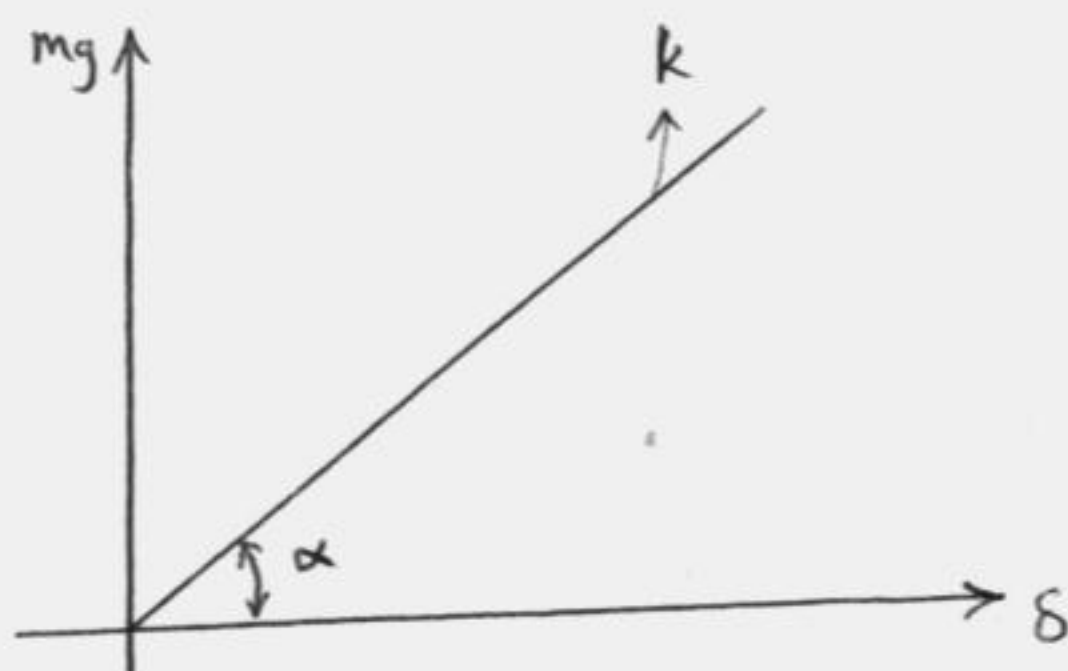
$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 (k + k - m_1 \omega^2) - k X_2 = 0 \\ X_2 (k + k - m_2 \omega^2) - k X_1 = 0 \end{cases}$$

$$(\omega^2)^2 - \left[\frac{2k}{m_1} + \frac{2k}{m_2} \right] \omega^2 + \left(\frac{4k}{m_1 m_2} \right) = 0$$

با فرض $m_1 = m_2$ داریم:

$$(\omega^r)^2 - \frac{4k}{m} \omega^r + \frac{3k^2}{m^2} = 0$$

$$\omega_{1,2} = \frac{2k}{m} \pm \sqrt{\frac{4k^2}{m^2} - \frac{3k^2}{m^2}} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{k}{m} \\ \omega_2 = \frac{3k}{m} \end{cases}$$



$$k = \tan \alpha$$

با توجه به نقاط داشته شده نمودار مربوطه را
در کاغذ میلی متری رسم و k برابر زیر می گردد.

$$k = 904,92 \frac{N}{m}$$

علل وجود خطا

- ۱- وزن خود فنر
- ۲- صفحات هدایتی
- ۳- عدم اندازه گیری دقیق زمان ۲۰ نوسان توسط کرنومتر
- ۴- وجود مقاومت هوا
- ۵- وجود لغی در تکیه گاه D و میله C جرم از راستای افقی نیز کمی نوسان می کند.
- ۶- وجود اصطکاک بین میله و تکیه گاه

