

عنوان: ارتعاشات آزاد پیچشی

هدف: بررسی ارتعاشات پیچشی در سیستم یک درجه آزادی هیل و دیسک و تحقیق رابطه‌ی پریود نوسان و ممان اینرسی

مقدمه:

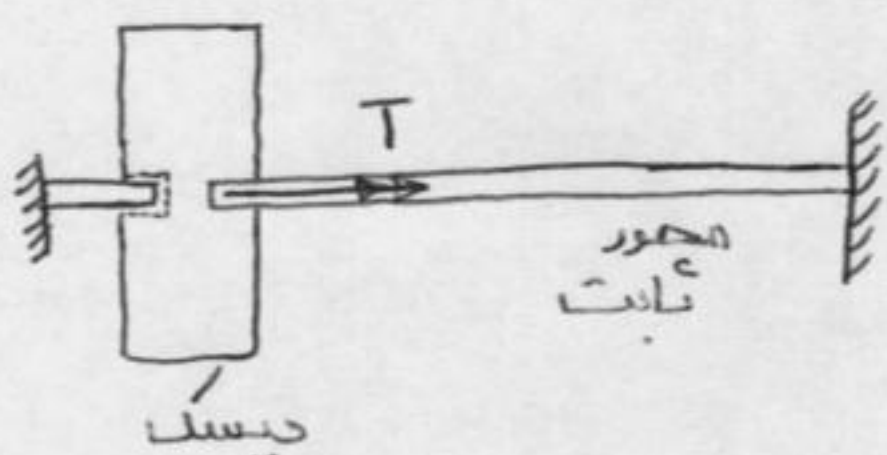
ارتعاشات پیچشی گونه‌ای از ارتعاشات هستند که اغلب در محورهای چرخان تحت تأثیر گشتاور پیچشی متغیر رخ می‌دهند. این گشتاور متغیر خود سبب بروز پیچش در محور چرخان گردیده و مسائلی را برای محورها فراهم می‌آورد. این ارتعاشات زمانی مهم و قابل ملاحظه می‌گردند که فرکانس نوسان گشتاور اعمالی به محور برابر فرکانس طبیعی ارتعاشات پیچشی آن محور گردد. این اتفاق باعث بروز تشدید در محوری گردد که با گذشت زمان سبب افزایش این ارتعاشات گردیده و می‌تواند زوال یا شکست را برای ما در پی خواهد داشت.

همانطور که اشاره گردید بیشتر محورهای چرخان در معرض این ارتعاشات قرار خواهند داشت در نتیجه مطالعات بر روی آن در شفت‌هایی همانند میل لنگ موتورهای احتراق داخلی یا شفت‌های انتقال قدرت گشتی‌ها و توربین‌ها که همواره در معرض گشتاورهای متناوب و متغیر قرار دارند بسیار با اهمیت است.

راههای متفاوتی برای رفع یا کم کردن این ارتعاشات وجود دارد که از بین آن‌ها می‌توان به کوپلینگ‌های دمپ کننده اشاره کرد که باعث جذب ضربات ناشی از تغییر گشتاورهای ناگهانی می‌شود. البته دمبرهای متفاوتی برای این نوع ارتعاشات موجود است که از ذکر تمامی آن‌ها خودداری می‌کنیم.

برای مثال از این نوع ارتعاشات می‌توان به موارد زیادی اشاره نمود. برای مثال للاج خشک خودروها گونه‌ای از این مثال‌هاست که با قرار دادن قتره‌هایی بر روی صفحه للاج توانسته اند این ارتعاشات را به گونه‌ای کنترل کنند. یا می‌توان به میل کارتن ماشین‌های دیزل اشاره نمود. توربین‌های بخار هم که با فشار بخار گشتاور پیچشی در خود ایجاد می‌کنند شامل این موارد هستند.

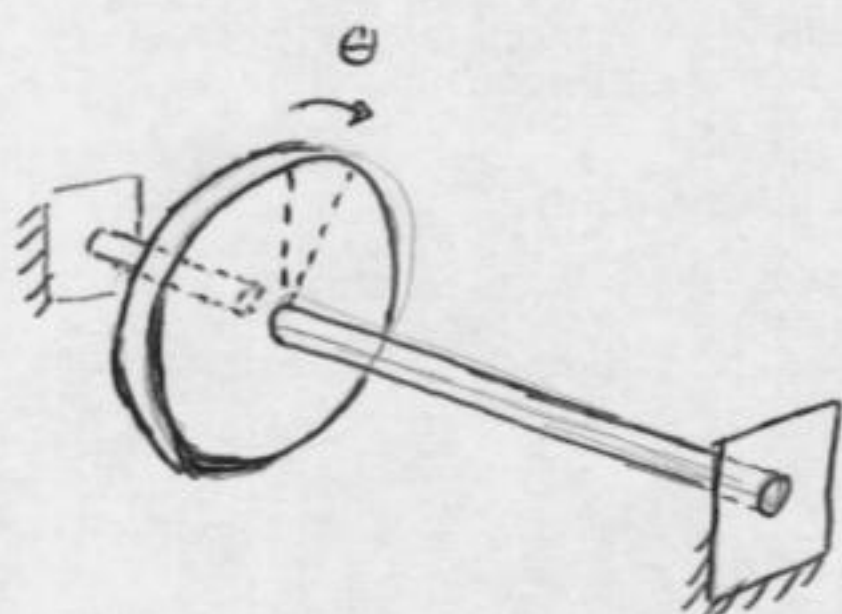
ضربات این ارتعاشات شامل برش در محورهاست که در حین کار سیب تسلیم محور گشته و زوال را پدید می‌آورد. در این آزمایش قصد داریم بر روی ساده‌ترین حالت این نوع ارتعاشات که دیسک متصل به محور ثابت است آزمایشات و بررسی‌های خود را انجام دهیم.



گشتاور اعمالی به دیسک: T

نظری های آزمایش :

دیسک صلبی را که به محور ثابتی متصل است در نظر بگیرید. دیسک را می توان به اندازه θ درجه از حالت تعادل اولیه رها می کنیم. این امر سیب بروز ارتعاش پیچشی در محور ثابت متصل به دیسک می گردد. حال روابط زیر را می توانیم بدست آوریم :



دیسک را از سمت دیگر برای هدایت با محور ثابت دیگر
یافتن می کنیم

I : ممان اینرسی دیسک

K_t : سختی پیچشی محور

پس از انحراف دیسک از حالت سکون گشتاور مخالفی در عکس جهت چرخش با توجه به سختی پیچشی نه میله دارد به وجود می آید. پس طبق رابطه تعادل ممان ها داریم :

$$\sum M = I \alpha = I \ddot{\theta}$$

$$\sum M = -K_t \theta$$

یعنی بودن علامت گشتاور به علت بروز گشتاور در جهت عکس چرخش θ می باشد

$$I \ddot{\theta} + K_t \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{K_t}{I} \theta = 0$$

طبق معادلات پاسخ زمانی در ارتعاشات خواهیم داشت :

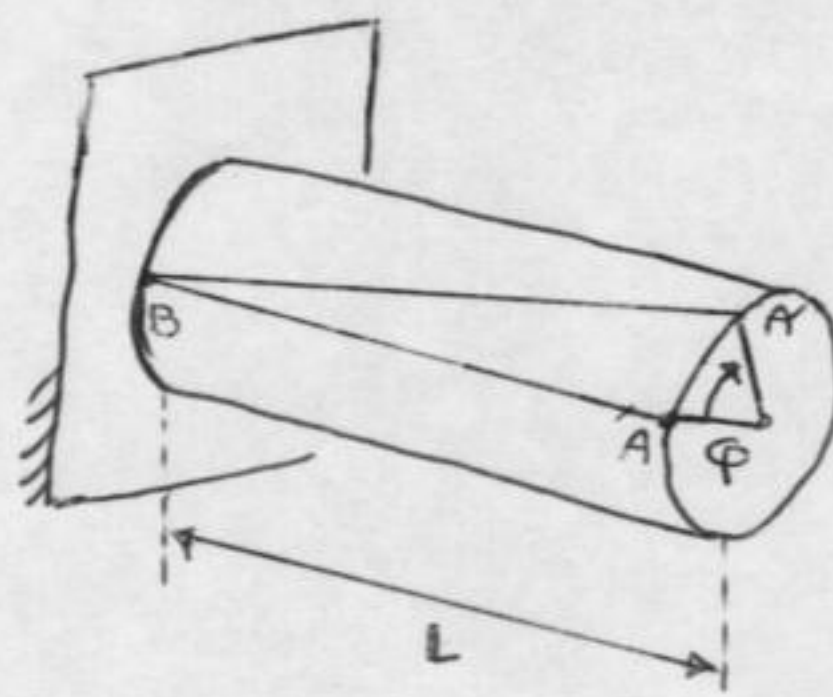
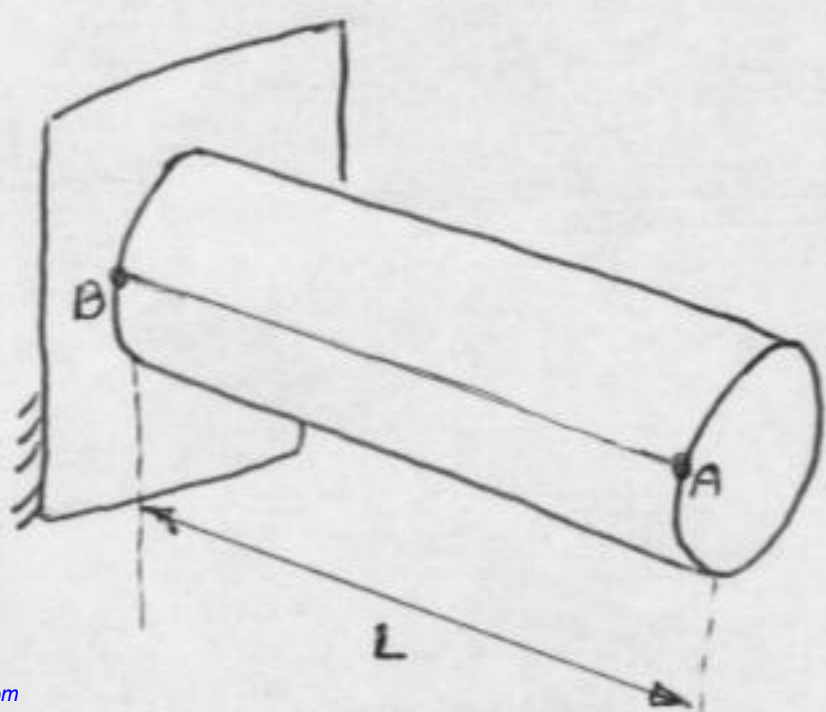
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K_t}}$$

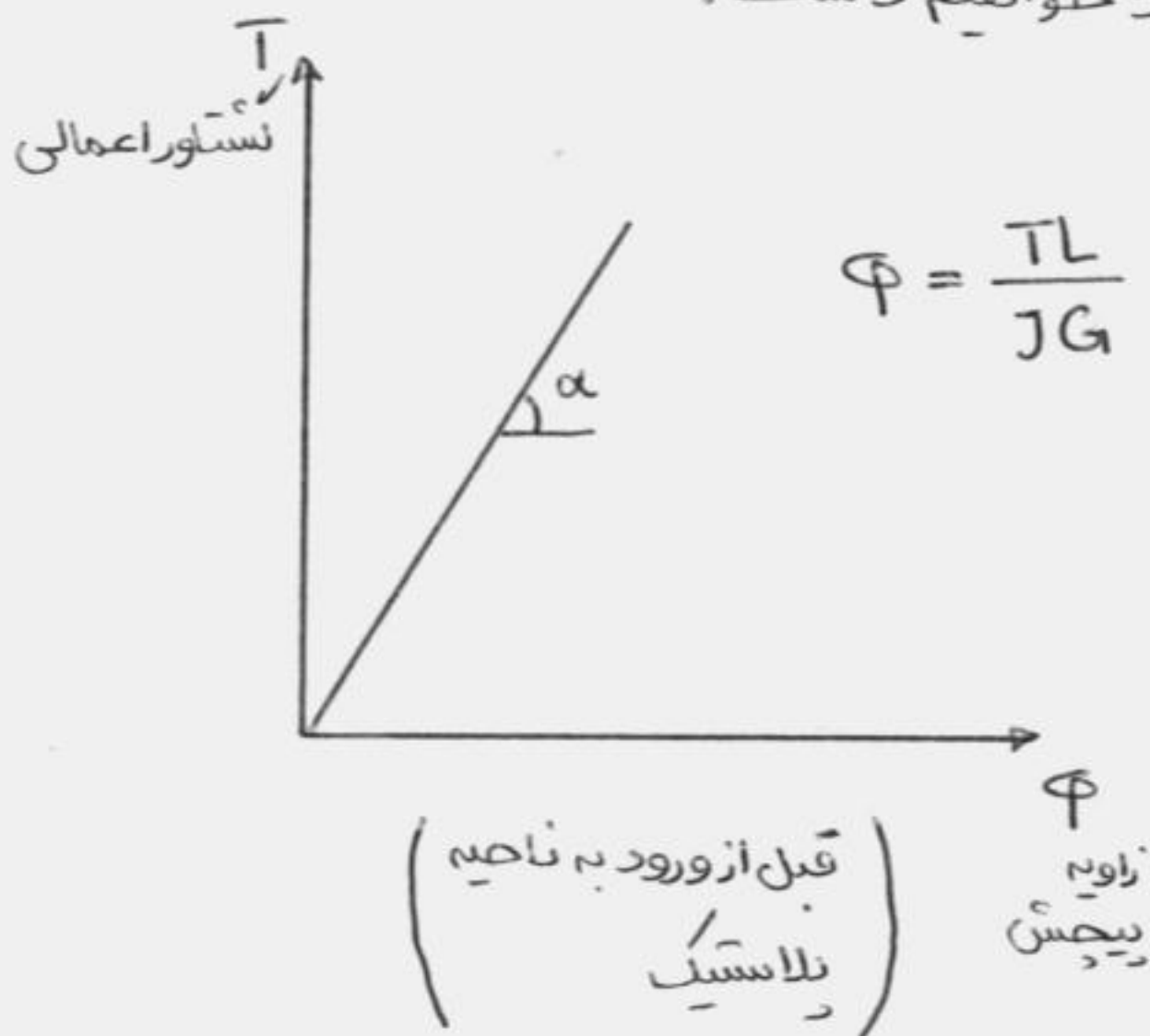
طبق روابط بالا می توان نوشتان بدست آمده رابطه ای بر حسب ممان اینرسی دیسک و سختی پیچشی محور است.

پیچش در مقاومت مصالح :

میل گردان دایره ای را در نظر بگیرید که از یک طرف به تکیه گاه ثابتی متصل است و در گشتاور T بر انتهای آن وارد آید. میل گردان می پیچد و انتهای آزاد آن به اندازه زاویه ϕ که آن زاویه پیچش می نامند، می چرخد. مشاهدات انجام شده نشان می دهد که در گستره معینی از مقادیر T ، زاویه پیچش ϕ با T متناسب است. همچنین مشاهده



شده است ϕ متناسب با طول L میله گردان است. به میان دینک برای تومیده گردان نه از مواد مشابهی ساخته شده اند و سطح مقطع برابر دارند ولی طول یکی دو برابر دینک است تحت یک آ بلسان زاویه پیچشی میله درازتر دو برابر کوتاهتر می باشد هدف مایید کردن روابط بین ϕ ، L است. یادآوری می کنیم که وقتی چنین میله گردانی تحت پیچش قرار می گیرد همه سطح مقطع های آن صفحه ای و بدون تابیدگی قرار می گیرند به عبارت دیگر مقاطع مختلف در امتداد میل گردان به اندازه های متفاوتی می چرخند. در نهایت رابطه ی زیر را خواهیم داشت:



از قانون هوک تعمیم گرفته و در اینجا سختی پیچشی محور را تعریف می کنیم که عبارت از مقاومت محور در مقابل پیچش است

$$T = K_t \phi \quad T = \tan \alpha \phi$$

$$T = \frac{JG}{L} \phi \rightarrow K_t = \frac{JG}{L}$$

سختی پیچشی را با نماد K_t مشخص می کنیم که برای تمامی مقاطع محورها قابل محاسبه است. تنها با محاسبه گشتاور دوم سطح آن محور (J).

گشتاور دوم سطح: (J)

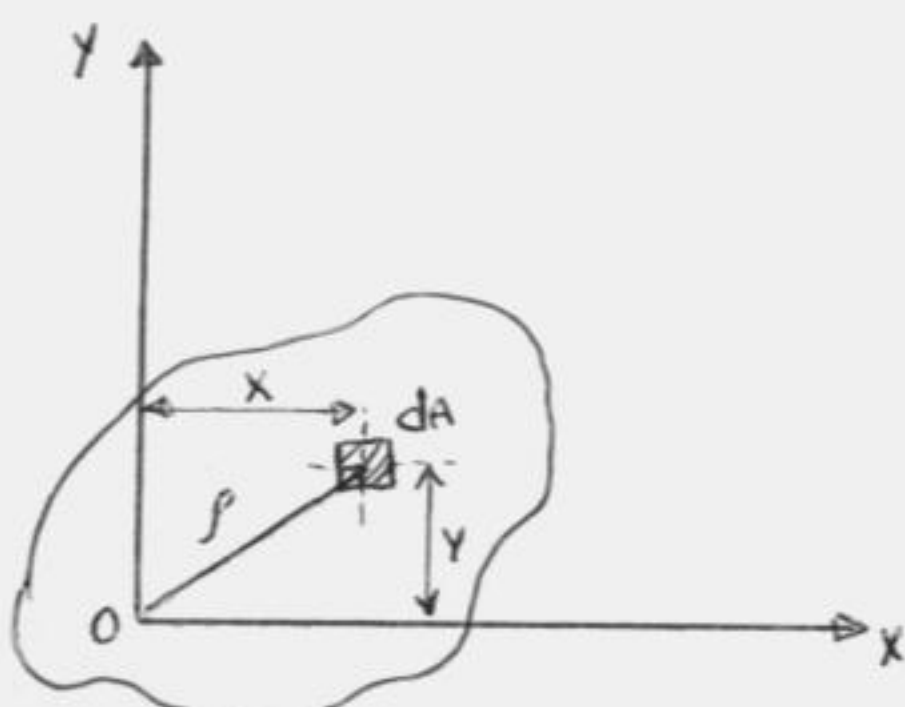
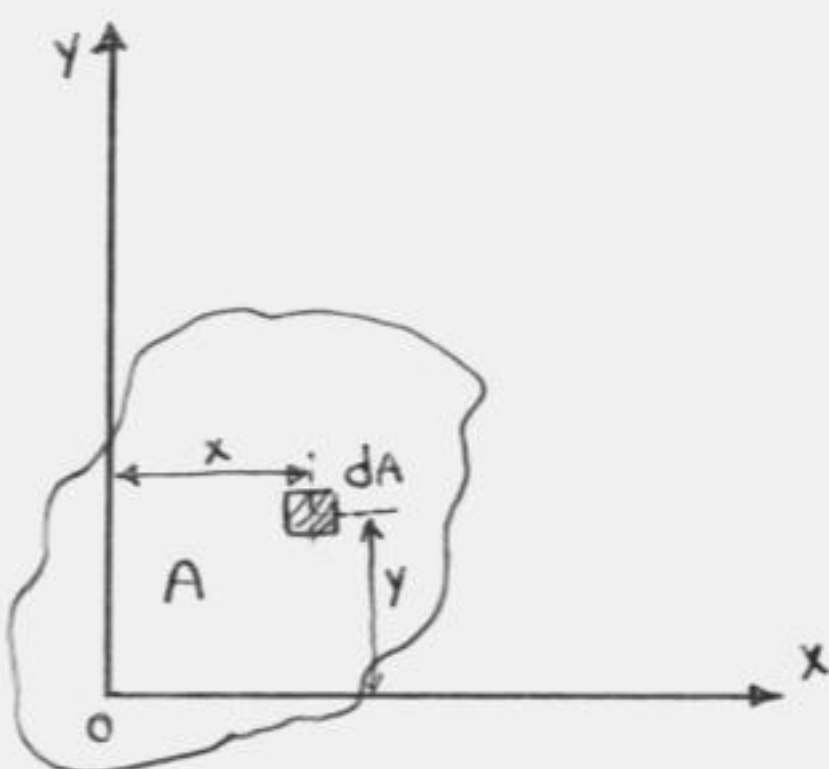
سطح A واقع در صفحه ی xy همانند شکل و سطح dA به مختصات x و y را در نظر بگیرید. گشتاور دوم یا لختی سطح A نسبت به محور x و گشتاور دوم یا لختی سطح A نسبت به محور y به ترتیب به صورت زیر تعریف می گردد.

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

این استرال ها را گشتاورهای لختی متعامد می نامند. زیرا به کمک مختصات جزء کوچک dA محاسبه می شوند. درحالی که هر استرال در واقع استرالی نوکانه است در بسیاری از کاربردها می توان جزء کوچک سطح های dA را به شکل نوارهای باریک افقی یا عمودی انتخاب کرد سپس محاسبات را انجام داد.

حال گشتاور لختی قطبی سطح A نسبت به O را به صورت استرال زیر تعریف می کنیم

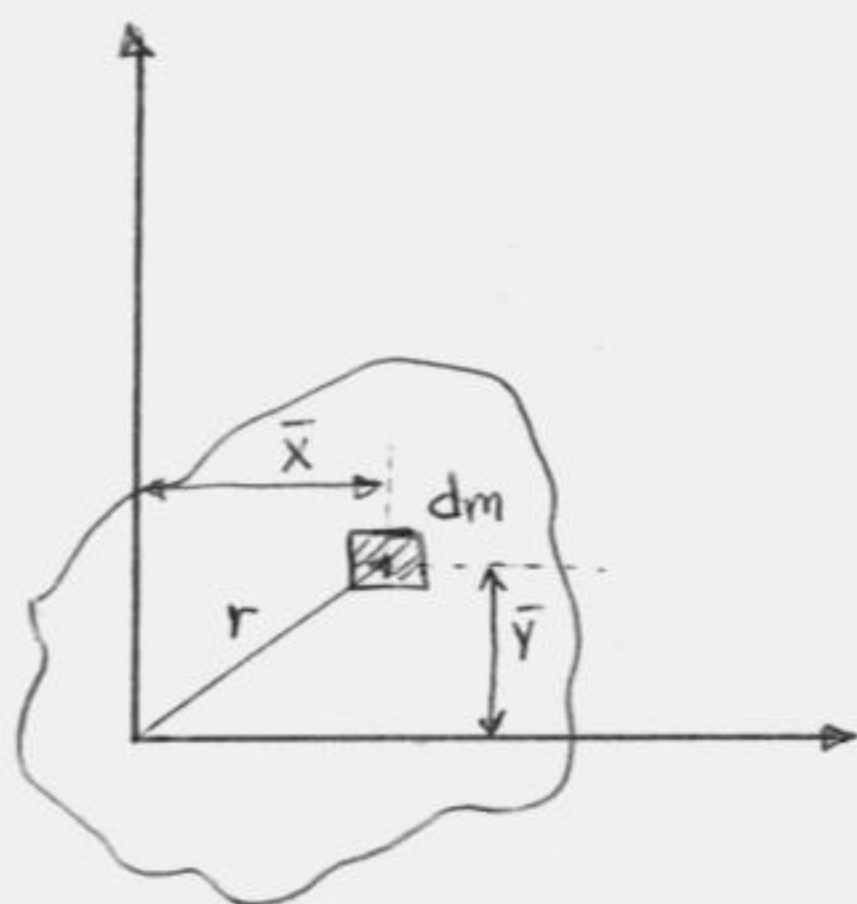
$$J_o = \int_A r^2 dA$$



اینرسی جرمی : (I)

اینرسی جرمی یا همان ممان اینرسی هم توسط انتگرال زیر بدست می آید

$$I = \int r^2 dm$$

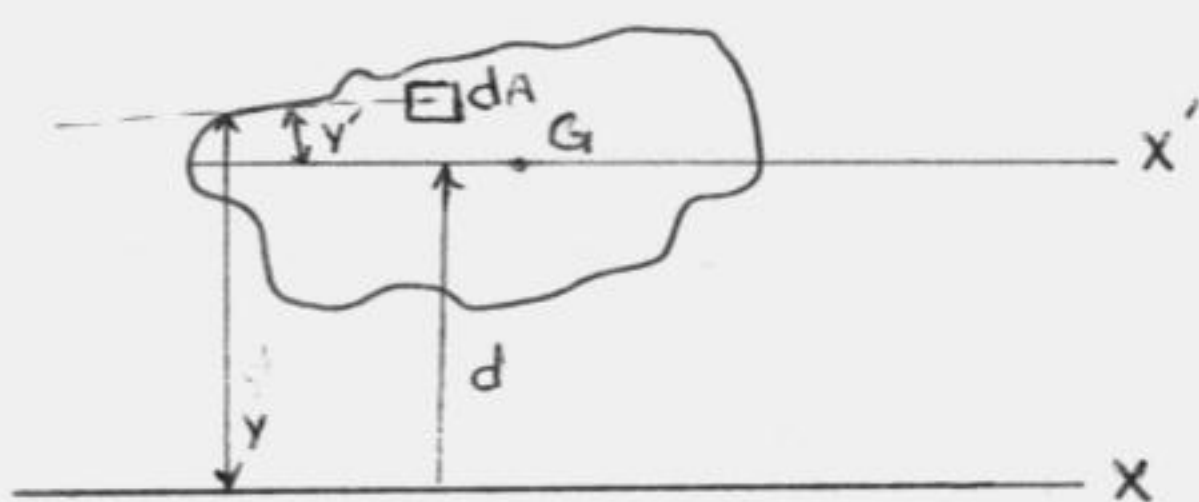


قضیه انتقال محوره های موازی :

اگر $I_{x'}$ گشتاور لختی سطح A نسبت به مرکز جرم x' باشد

آن گاه گشتاور لختی I_x سطح A نسبت به محور موازی با x'

به صورت زیر است :



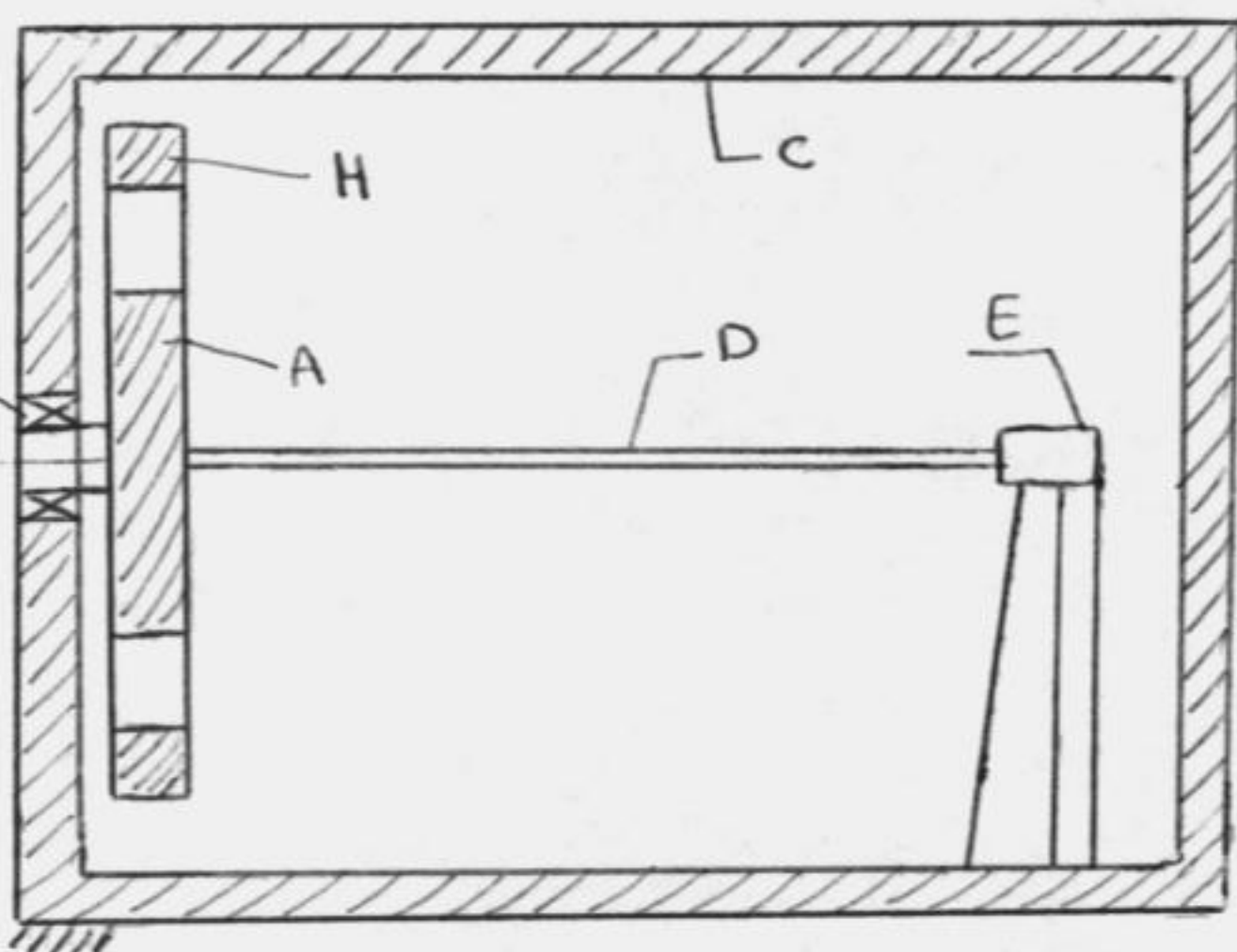
$$I_x = I_{x'} + Ad^2$$

شرح دستگاه :

سیستم پیچشی متشکل از یک رتور و یک چرخ طیار سنسین A که اینرسی سیستم را تأمین می کند و توسط بلبرینگ B به قاب C متصل شده یک میلرد D از یک سمت به چرخ A متصل و از سمت دیگر به فلک E متصل و ثابت گردیده است. لیره E در امتداد شلخه ی بایستی متحرک است و اینچونین طول میله درگیر قابل تغییر است.

H هم محل اتصال دوزنه نوچک برای افزایش

ممان اینرسی چرخ A است که در محل های بعدی اشاره خواهد شد



محاسبه تجربی همان انرژی دیسک A :

برای این کار آزمایش زیر را انجام خواهیم داد:

برای انجام این آزمایش به یک چرخ طیار (A) ، نخ ، وزنه کوچک (100gr) ، کرنومتر نیاز داریم.

روش انجام :

چرخ طیار را در قسمت خارجی قاب C بسته ، نخ با طول مشخص را در اختیار داریم ، یک سر نخ را بر روی زائده روی

چرخ بسته و سر دیگر نخ وزنه 100gr را می آویزیم . طول نخ را چنان

کنیم و در زمان رسیدن وزنه به زمین ، نخ از زائده روی چرخ جدا شود . ارتفاعی را که وزنه از آنجا رها شده برابر 1430 mm

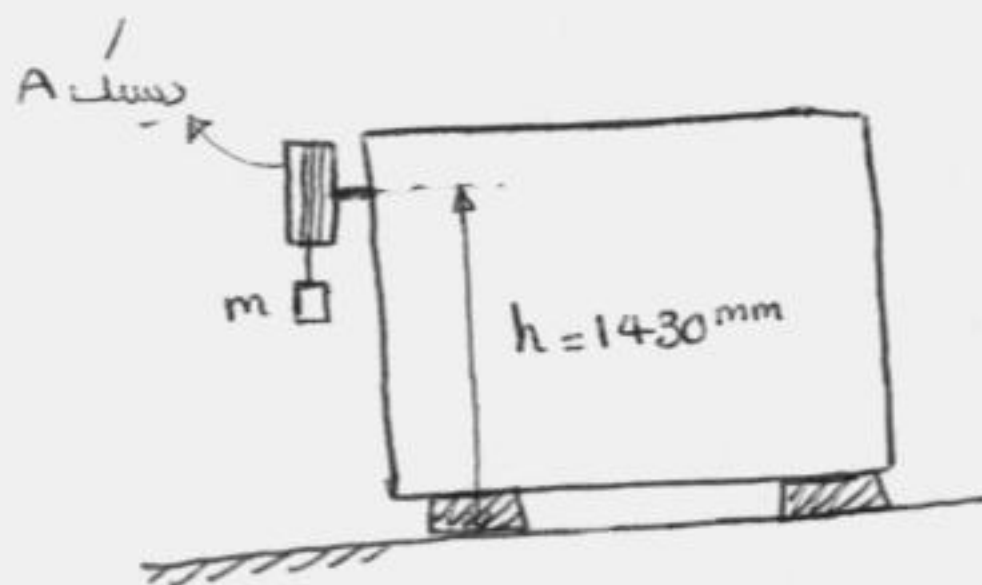
کنیم و در زمان رسیدن وزنه به زمین ، نخ از زائده روی چرخ جدا شود . ارتفاعی را که وزنه از آنجا رها شده برابر 1430 mm

n_1 : تعداد دوران دیسک از لحظه‌ای رها شدن وزنه تا برخورد آن به زمین

t_1 : زمانی که وزنه از ارتفاع h را می پیماید تا به زمین برسد توسط کرنومتر

t_2 : زمان طی شده از لحظه‌ای برخورد وزنه به زمین تا توقف کامل دیسک

n_2 : تعداد دورهایی که چرخ دوران می کند تا به حالت سکون برسد از لحظه‌ای که وزنه به زمین برخورد کند



$$m = 100 \text{ gr}$$

$$h = 1430 \text{ mm}$$

$$D = 250 \text{ mm}$$

دیسک بزرگ

$$n_1 = \frac{h}{\pi D} = \frac{\text{ارتفاع}}{\text{محیط}}$$

$$\begin{cases} \vec{V} = gt + \vec{V}_0 \\ \text{شتاب ثابت} \end{cases} \rightarrow g = \frac{V}{t}$$

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \\ \rightarrow h = \frac{1}{2} \frac{V}{t} t^2 \end{cases} \rightarrow \boxed{V = \frac{2h}{t_1}}$$

$$V = r\omega = \left(\frac{D}{2}\right)\omega \rightarrow \boxed{\omega = \frac{2V}{D}} \rightarrow \boxed{\omega = \frac{4h}{t_1 D}}$$

از روابط بالا مقادیر مان را بدست آورده و در معادله‌ی زیر قرار خواهیم داد تا I دیسک را بدست آوریم

$$\boxed{mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_B\omega^2\left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)}$$

طبق آزمایش اعداد روبه روبرو به صورت تجربی بدست آوردیم: (دیسک بزرگ)

$$t_1 = 5.28 \text{ s} \quad n_1 = \text{از فرمول} \quad t_2 = 42.26 \text{ s} \quad n_2 = 15 \frac{1}{4} \text{ دور}$$

اطلاعات بدست آمده برای دیسک کوچک:
 $N_2 = 8$ دور

$$t_1 = 4.96 \text{ s}$$

$$t_2 = 17.66 \text{ s}$$

محاسبات برای بدست آوردن I تجربی:

دیسک بزرگ:

$$D = 0.25 \text{ m} \quad m = 100 \text{ gr}$$

$$\omega = \frac{4h}{t_1 D} = \frac{4 * 1.43}{5.28 * 0.25} = 4.33 \text{ r/s}$$

$$\bar{V} = \frac{2 * 1.43}{5.28} = 0.54 \text{ m/s} \quad n_1 = \frac{1.43}{\pi * 0.25} = 1.821$$

$$(0.1)(9.81)(1.43) = \frac{1}{2} * 0.1 * (0.54)^2 + \frac{1}{2} I (4.33)^2 \left(1 + \frac{1.821}{15.25}\right) \rightarrow I = 0.132$$

دیسک کوچک:

$$D = 0.15$$

$$\omega = \frac{4 * 1.43}{4.96 * 0.15} = 7.68 \text{ r/s}$$

$$\bar{V} = \frac{2 * 1.43}{4.96} = 0.57$$

$$n_1 = \frac{1.43}{\pi * 0.15} = 3.03$$

$$(0.1)(9.81)(1.43) = \frac{1}{2} * 0.1 * (0.57)^2 + \frac{1}{2} I (7.68)^2 \left(1 + \frac{3.03}{8}\right) \rightarrow I = 0.034$$

I تئوری:

دیسک بزرگ:

$$I = \frac{MR^2}{2} = \frac{MD^2}{8} = 0.144$$

$$M = 18.5 \text{ kg}$$

دیسک کوچک:

$$I = \frac{mD^2}{8} = 0.024$$

$$m = 8.8 \text{ kg}$$

درصد خطا:

دیسک بزرگ:

$$\frac{\text{عملی} - \text{تئوری}}{\text{تئوری}} * 100 = \frac{0.144 - 0.132}{0.144} * 100 = 8.33 \%$$

دیسک کوچک:

$$\frac{|0.024 - 0.034|}{0.024} = 41.66 \%$$

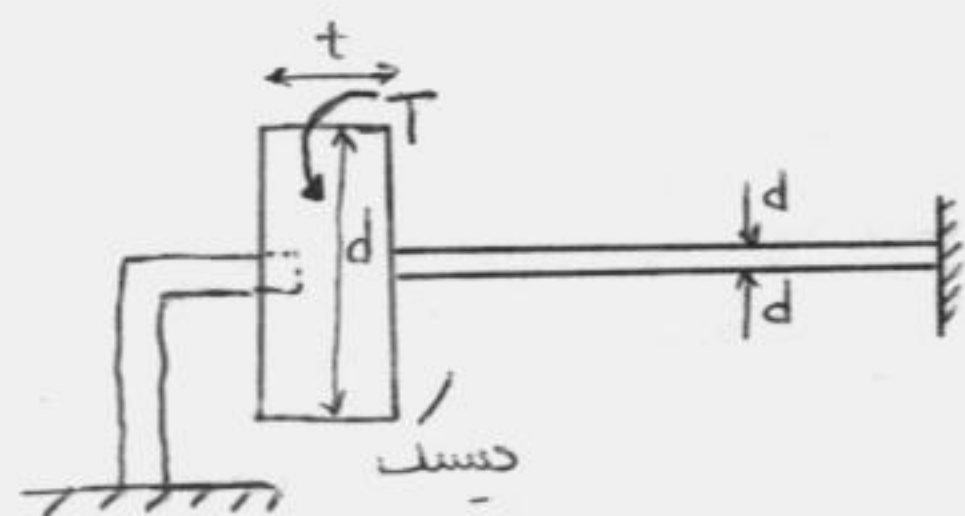
خطای بیشتر در دیسک کوچک به علت سختی در اندازه گیری های مربوطه است که سبب بروز خطا در نتیجه می گردد

آزمایش اصلی:

جرخ طیار را نصب نموده و میلگرد را بین دو فک قرار داده و فاصله‌ی بین هر فک را برابر طول خواسته شده روی مقادیرهای 300، 400، 500 تنظیم می‌کنیم. بقیه طول میلگرد به حساب نخواهد آمد و در محاسبات ما نقشی نخواهد داشت. توجه شود تا فک‌ها را محکم سفت کنیم تا هیچ لغزشی در کار نباشد.

حال دیسک را در هر مرحله به اندازه تقریباً 6° منحرف کرده و رها می‌کنیم و زمان t پررود کامل را توسط کرنومتر ثبت نموده در نتیجه برای بدست آوردن پررود یک نوسان مقدار را تقسیم بر 6 می‌نماییم

همین روش را برای چهار مرحله‌ی زیر انجام می‌دهیم:



مرحله اول: دیسک بزرگ

مرحله دوم: دیسک کوچک

مرحله سوم: دیسک کوچک به همراه وزنه‌های جانبی کوچک

مرحله چهارم: دیسک کوچک به همراه وزنه‌های جانبی بزرگ

چند : دیسک بزرگ

$$t = 50 \text{ mm} \quad d = 250 \text{ mm} \quad m = 18.5 \text{ kg}$$

دیسک کوچک

$$t = 50 \text{ mm} \quad d = 150 \text{ mm} \quad m = 8.8 \text{ kg}$$

وزنه‌های جانبی کوچک

$$t = 50 \text{ mm} \quad d = 70 \text{ mm} \quad m = 1.5 \text{ kg}$$

وزنه‌های جانبی بزرگ

$$t = 50 \text{ mm} \quad d = 100 \text{ mm} \quad m = 2.8 \text{ kg}$$

مشخصات:

جنس تمامی دیسک‌ها
چدن است

میل فولادی $d = 4 \text{ mm}$

فولاد معمولی St 37 $E = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

مرحله اول:

طول میل (L) ^{mm}	زمان 6 نوسان t(s)	$T = \frac{t}{6}$ تجربی	T تئوری	K _t	j	T ² تجربی	درصد خطا	T ² تئوری
300	5.53	0.92	0.922	6.693	2.5×10^{-11}	0.84	1.1	0.85
400	6.3	1.05	1.063	5.026	"	1.10	2.7	1.13
500	7.01	1.16	1.189	4.021	"	1.34	5.2	1.41

دیسک بزرگ

محاسبات: $I_{\text{تئوری}} = 0.144$

$$j = \frac{\pi D^4}{32} = 2.513 \times 10^{-11}$$

میلارد

$$\left\{ \begin{array}{l} L = 300^{mm} \rightarrow K_t = \frac{JG}{L} = \frac{80 \times 10^9 \times 2.513 \times 10^{-11}}{0.3} = 6.693 \text{ و } T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K_t}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.144}{6.693}} = 0.922 \\ L = 400^{mm} \rightarrow K_t = 5.026 \text{ و } T = 1.063 \\ L = 500^{mm} \rightarrow K_t = 4.021 \text{ و } T = 1.189 \end{array} \right.$$

مرحله دوم:

دیسک کوچک:

طول میل (L) ^{mm}	زمان 6 نوسان t(s)	$T = \frac{t}{6}$ تجربی	T تئوری	K _t	j	T ² تجربی	% درصد خطا	T ² تئوری
300	2.97	0.49	0.382	6.693	2.513×10^{-11}	0.24	71	0.14
400	3.29	0.54	0.44	5.026	"	0.29	52	0.19
500	3.84	0.64	0.49	4.021	"	0.4	66	0.24

$$j = 2.513 \times 10^{-11}$$

$$I_{\text{تئوری}} = 0.0244$$

مرحله سوم :

طول میل L	زمان 6 نوسان (s)	$T = \frac{t}{6}$ تجربی	T تئوری	K_t	j	T^2 تجربی	% درصد خطا	T^2 تئوری
300	6.16	1.02	0.968	6.693	2.513×10^{-11}	1.04	10.6	0.94
400	7.12	1.18	1.12	5.026	"	1.39	11.2	1.25
500	7.87	1.31	1.25	4.021	"	1.71	9.6	1.56

دیسک
لوجیک

به همراه

وزنه های

جانبی لوجیک

محاسبات :

$$I_{\text{تئوری}} : I = I_{\text{دیسک}} + 2 I_{\text{جانبی}}$$

$$I_{\text{تئوری}} = \frac{1}{2} m r^2 + 2 \left[\frac{m' r'^2}{2} + m' a^2 \right] = \frac{1}{2} * 8.8 \left(\frac{0.15}{2} \right)^2 + 2 \left[\frac{1.5 * 0.035^2}{2} + 1.5 * 0.21^2 \right]$$

$$I_{\text{تئوری}} = 0.159 \text{ kg.m}^2$$

مرحله چهارم :

دیسک لوجیک

به همراه

وزنه های جانبی

بزرگ

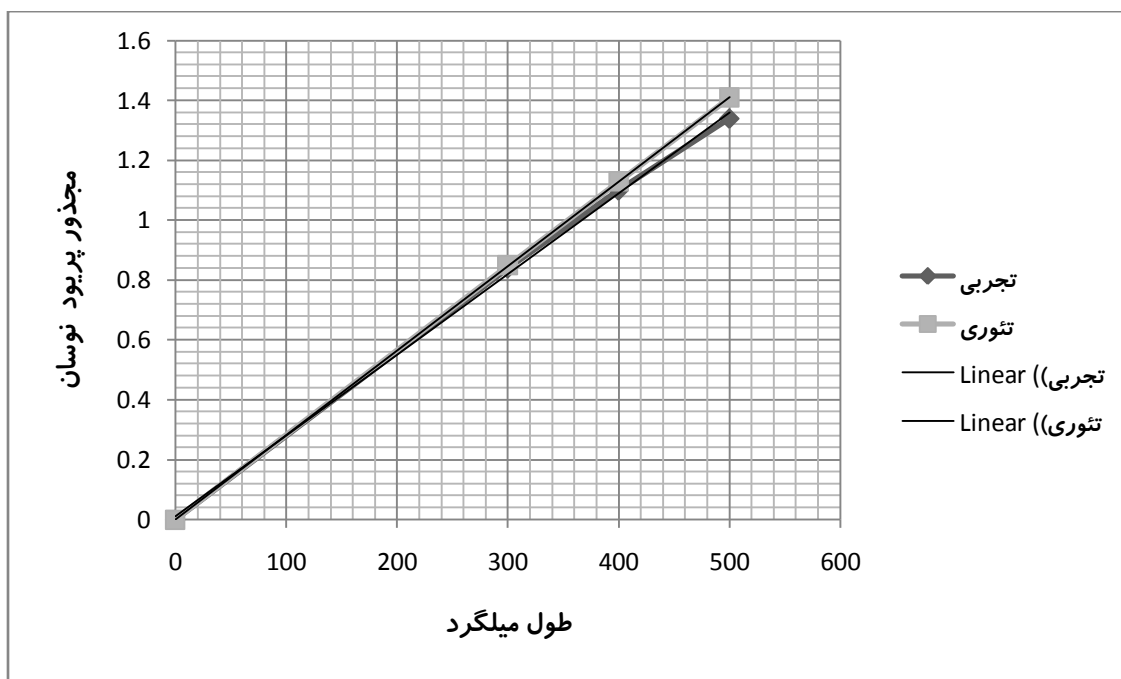
طول میل (L) mm	زمان 6 نوسان (s)	$T = \frac{t}{6}$ تجربی	T تئوری	K_t	j	T^2 تجربی	% درصد خطا	T^2 تئوری
300	7.87	1.31	1.28	6.693	2.513×10^{-11}	1.71	4	1.64
400	9.14	1.52	1.48	5.026	"	2.31	5.4	2.19
500	9.9	1.65	1.65	7.021	"	2.72	0	2.72

$$I_{\text{تئوری}} = \frac{1}{2} m r^2 + 2 \left[\frac{m' r'^2}{2} + m' a^2 \right] = \frac{1}{2} * 18.5 * \left(\frac{0.25}{2} \right)^2 + 2 \left[8.8 * \frac{0.05^2}{2} + 2.8 * 0.21^2 \right]$$

$$I = 0.2787 \text{ kg.m}^2$$

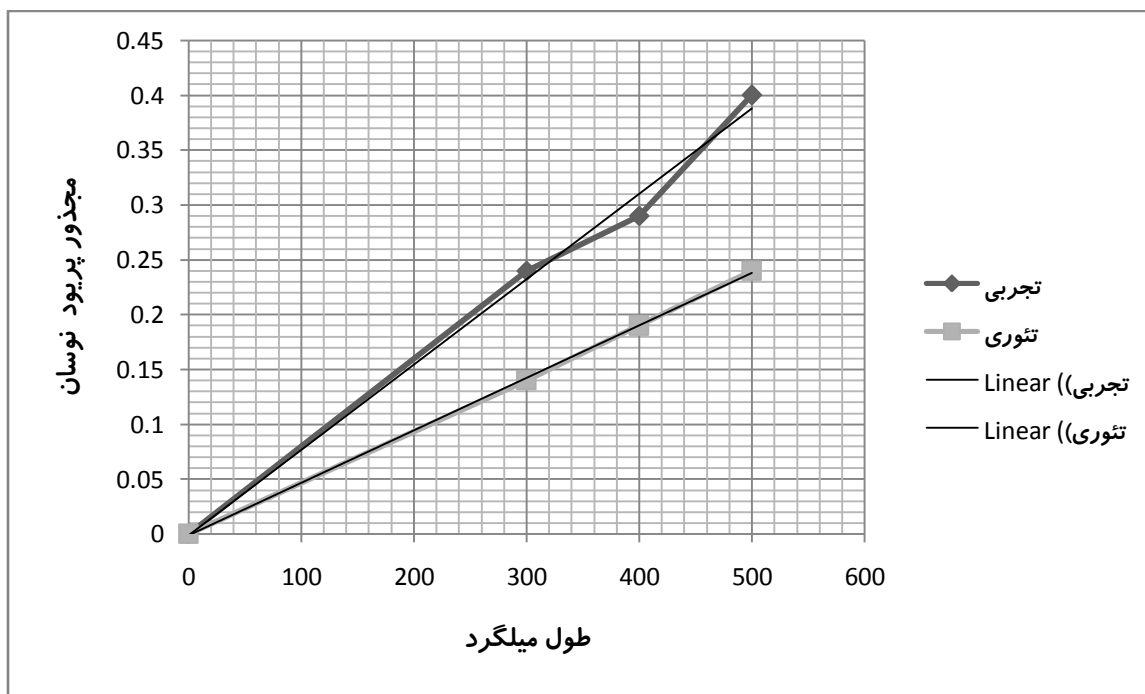
مرحله اول:

دیسک بزرگ



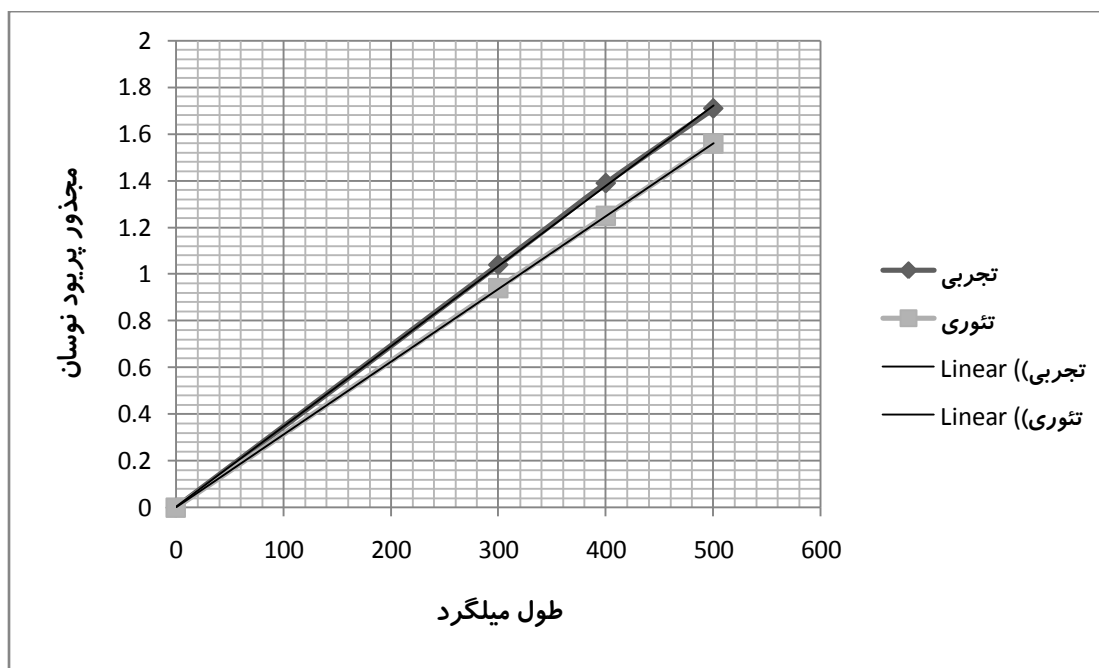
مرحله دوم:

دیسک کوچک



مرحله سوم:

دیسک کوچک به همراه وزنه های جانبی کوچک



مرحله چهارم:

دیسک کوچک به همراه وزنه های جانبی بزرگ

