

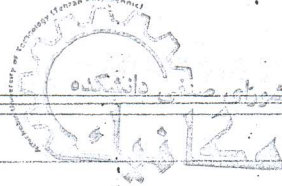
بسمه تعالی



نام جزوه: دینامیک ماشین

نام استاد: دکتر اسلامی

دانشگاه: صنعتی امیرکبیر



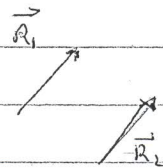
Unit II

Velocity Analysis of Linkages

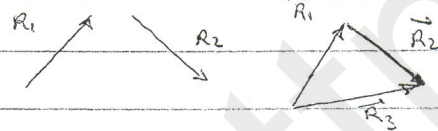
Objective 1:

تعیین بردارها و خواص آن ها:

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_2 \quad \text{اندازه بردار مساوی}$$

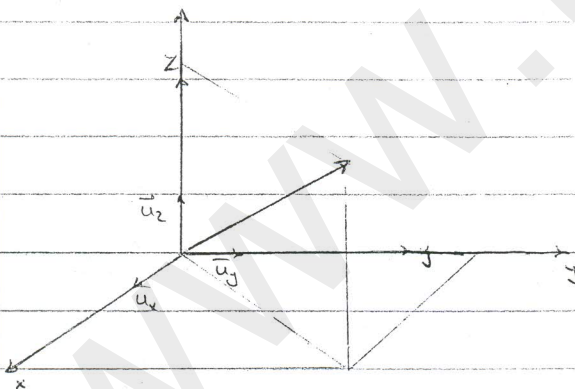


۲. جمع دو بردار



$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{R}_3$$

۳. بردار بر حسب مؤلفه ها:



$$\vec{R} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

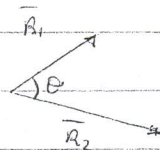
$$\vec{R} = r\vec{u}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{u} = \frac{x}{r}\vec{u}_x + \frac{y}{r}\vec{u}_y + \frac{z}{r}\vec{u}_z$$

۴. حاصلضرب داخلی (dot-product)

$$R_1 \cdot R_2 = R_1 R_2 \cos \theta$$



حاصل ضرب خارجی (cross product)

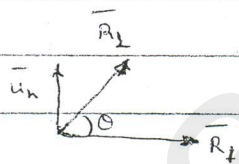
$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \vec{R}_3$$

$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{R}_1 = x_1 \vec{u}_x + y_1 \vec{u}_y + z_1 \vec{u}_z$$

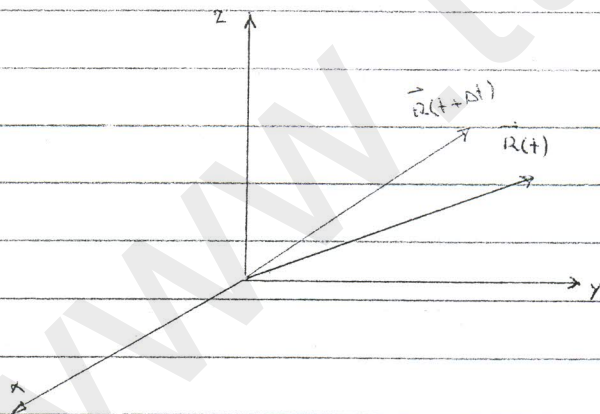
$$\vec{R}_2 = x_2 \vec{u}_x + y_2 \vec{u}_y + z_2 \vec{u}_z$$

$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = R_1 R_2 \sin \theta \vec{u}_n$$



مشتق یک بردار نسبت به زمان

$$\vec{R} = \vec{R}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}$$



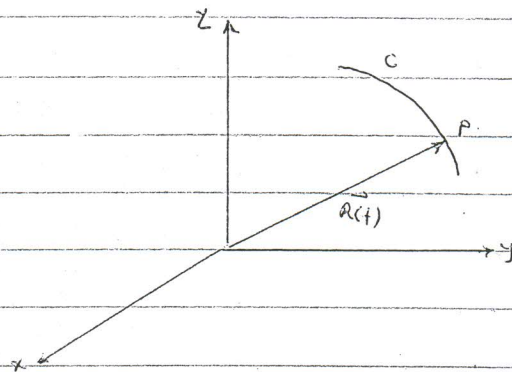
objective 2

تعیین سرعت یک ذره نسبت به متغیرهای مسیر

مشتق بردار مکان نسبت به زمان سرعت یا (velocity) است

2. تعریف velocity یک ذره حرکت در فضا عبارت است از مشتق position vector نسبت

برایان



$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{xyz}$$

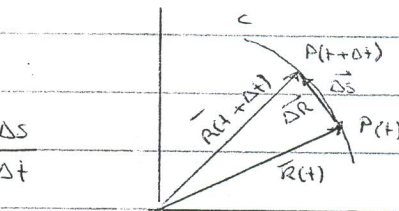
از سیستم‌های مختصات به حساب مختصات مسیر (coordinate systems in term of path variable)

در یک ذره‌ی متحرک روی مسیری که در فضای سه بعدی مختصات xyz مشخص باشد، حالت

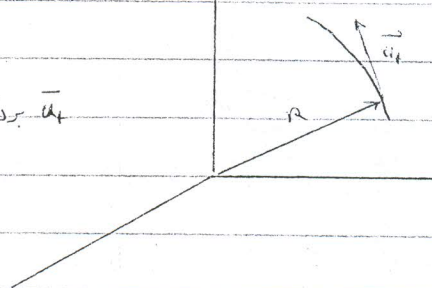
حرکت است.

بنابراین سرعت ذره‌ی P برابر است با $\vec{v} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{xyz}$ یا برابر است با

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{xyz} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_t \end{aligned}$$



که بردار واحد مماس بر مسیر در جهت حرکت است

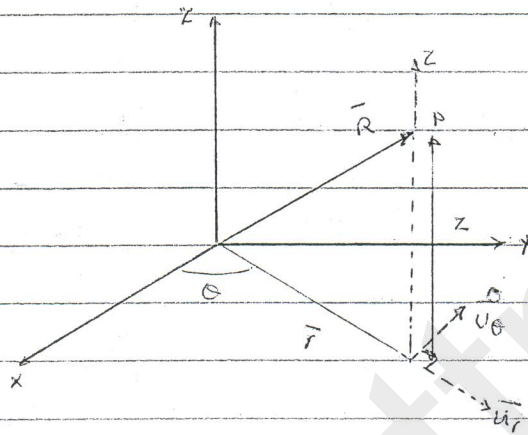


$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_t$$

گورگنات استرادی

از این گورگنات برای استفاده در مبدل نیروی مسیر دایره‌ای حرکت نماید و برای حرکت دورانی

باشد.



$$\vec{R} = \vec{r} \vec{u}_r + z \vec{u}_z$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

تایید سرعت velocity در P برابر است با:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \vec{u}_r + z \vec{u}_z) = \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{u}_r + \vec{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z + z \frac{d\vec{u}_z}{dt}$$

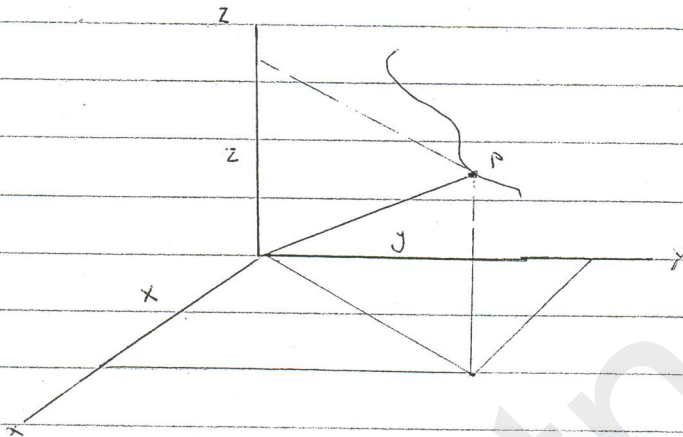
$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_z}{dt} = 0$$

$$\vec{v} = \vec{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + z \vec{u}_z$$

Part II سیستم در مختصات xyz

سیستم در مختصات xyz مفروض است:



$$\vec{R} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$$

objective 3 :

کاربرد اعداد مختلط :

$$R = r e^{j\theta} \quad \text{یک عدد مختلط را به شکل زیر نمایش داده می شود:}$$

r = magnitude

θ = argument

$$j = \sqrt{-1}$$

$$R = \underbrace{r(\cos\theta)}_{\text{real part}} + \underbrace{j r \sin\theta}_{\text{imaginary part}}$$

$$R = a + jb$$

برای عدد مختلط زیر:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

جمع اعداد مختلط :

$$R_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$

$$R_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$R_1 + R_2 = r_1 e^{j\theta_1} + r_2 e^{j\theta_2} = r_1 \cos \theta_1 + j r_1 \sin \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 + j r_2 \sin \theta_2$$

$$= \underbrace{(r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2)}_{\text{Real}} + j \underbrace{(r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)}_{\text{imaginary}}$$

تطبيق بر جمع بردارها است.

تفریق اعداد مختلط :

$$R_1 - R_2 = (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) + j (r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2)$$

تطبيق بر تفریق بردارها است.

حاصلضرب اعداد مختلط :

$$R_1 \cdot R_2 = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

تطبيق بر هنج نوع ضرب برداری (داخلی و خارجی) می باشد.

تقسیم اعداد مختلط :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

مشتق بردارها :

$$R = re^{j\theta} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta}$$

منطبق بر مشتق بردارها است :

در بردارها : $v = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta$ و $\bar{R} = r\bar{u}_r$ با مقایسه با مشتق بردارها :

$$\frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta}$$

$$\bar{u}_r = e^{j\theta}$$

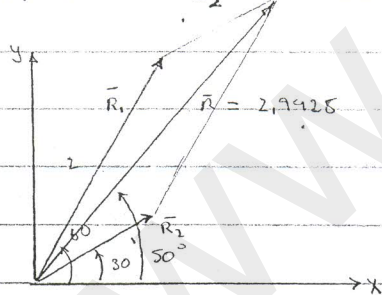
$$\bar{u}_\theta = je^{j\theta}$$

$$r_1 = 2$$

$$r_2 = 1$$

$$\theta_1 = 60^\circ$$

$$\theta_2 = 30^\circ$$



مثال : حالت مختلف برداری را حل کنید :

اگر بردار بودند

اگر مختصات باشند

$$R_1 = 2e^{j60}$$

$$R_2 = 1e^{j30}$$

$$R_1 + R_2 = 2\cos 60 + j2\sin 60 + 1\cos 30 + j\sin 30$$

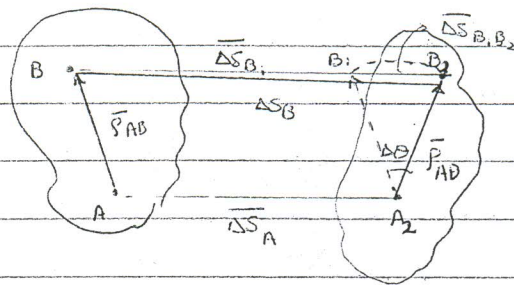
$$= (2\cos 60 + \cos 30) + j(2\sin 60 + \sin 30) = 1.866 + j2.232 = R_3$$

$$r_3 = \sqrt{1.866^2 + 2.232^2} = 2.4928$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \frac{2.232}{1.866} = 50^\circ$$

objective 4:

تعیین رابطه بین سرعت دو نقطه از یک جسم صلب



pure translation حرکت خالص است. سرعت جسمی تنها یکسان باشد

طبق قضیه chaslev هر حرکت کلی یک جسم صلب برابر است با یک pure translation

پاروئی یک pure rotation

$$\Delta S_B = \Delta S_{B_1} + \Delta S_{B_1 B_2} \quad \text{از روی شکل:}$$

$$\Delta S_B = \Delta S_A + \Delta S_{B_1 B_2} \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_A}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_{B_1 B_2}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad (a) \quad \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad (b)$$

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad (c)$$

8. رابطه (b) یک مثلث برداری است

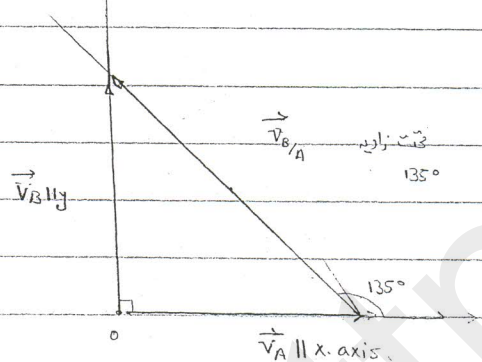
مثال: شتاب یک جسم صلب اطلاعات زیر معلوم است:

1- $\vec{V}_A$ برابر 20 in/s مؤزی محور x

2- $\vec{V}_B$ مؤزی محور y حرکت می کند

3- $\vec{V}_{B/A}$ تحت زاویه 135° با محور x حرکت می کند

مطلوب است: ترسیم دیاگرام سرعت و تعیین مقادیر $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$



$$1 \text{ in} = 10 \text{ in/sec}$$

1- مقیاس و تبدیل فضایی انتخاب می کنیم

2- سرعت $\vec{V}_A$ را از مبدأ O رسم می کنیم

3- سرعت نقطه B :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

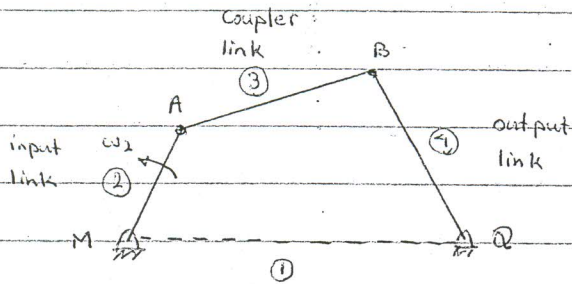
چون از جهت برداری بالا $\vec{V}_A$ معلوم $\vec{V}_B \parallel y$ و $\vec{V}_{B/A}$ تحت زاویه 135° مثبت x می باشد

مثلاً برداری قابل ترسیم است

$$\left\{ \begin{array}{l} V_B = 20 \text{ in/sec} \\ V_{B/A} = 20\sqrt{2} \text{ in/sec} \end{array} \right.$$

objective 5

مکانیزم های چهار میله ای ساده

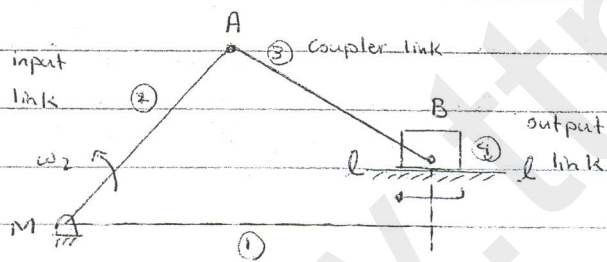


هدف: سرعت دورانی ساده و با انتخاب

ابعاد مناسب یک حرکت دلخواه را بدست

آوریم

Four bar linkage system

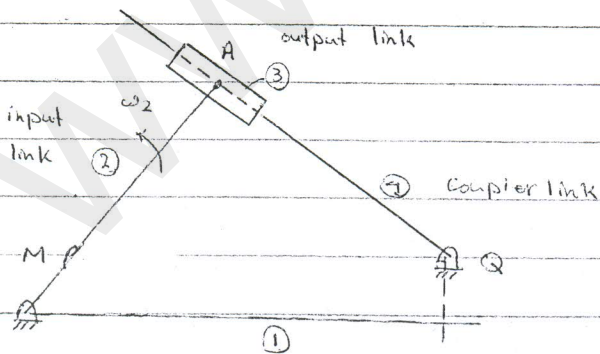


هدف: با سرعت دورانی ساده و با

انتخاب ابعاد مناسب حرکت خطی

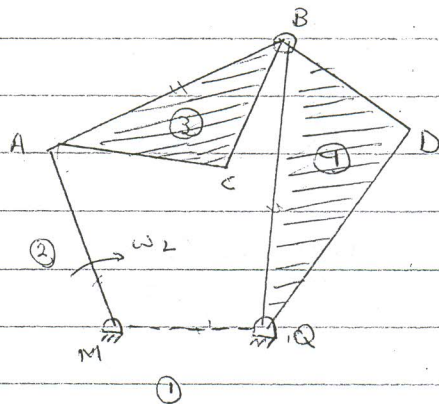
دلخواه را بدست می آوریم

Slider crank mechanism



Inverted slider crank mechanism

مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم زیر



$$MA = 4''$$

$$AB = 8''$$

$$QB = 5.5''$$

$$MQ = 12''$$

$$\omega_2 = 94.2 \text{ rad/sec}$$

ترسیم:

$$12 \text{ ft/sec}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_M + \vec{V}_{A/M}$$

2- سرعت نقطه A

$$V_A = MA \cdot \omega_2 = 4 \times 94.2 = 376.8 \times \frac{1}{12} = 31.4 \text{ ft/sec} \quad \underline{\underline{1 \text{ MA}}}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

3- سرعت نقطه B

چون $V_{B/A}$ عمود بر AB و V_B عمود بر QB می باشد
از مشابهت مثلث قائم ترسیم است.

$$V_{B/A} = 20 \text{ ft/sec}$$

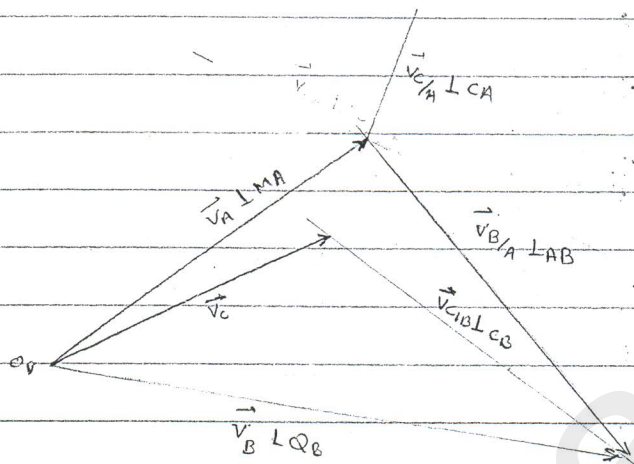
4- با استفاده از شباهت

$$V_B = 34 \text{ ft/sec}$$

5- سرعت درونی میل های 3 و 4

$$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{20}{8} \times 12 = 30 \text{ rad/sec} \quad \text{ساعت}$$

$$\omega_4 = \frac{V_B}{QB} = \frac{34}{5.5} \times 12 = 74.2 \text{ rad/sec} \quad \text{ساعت}$$



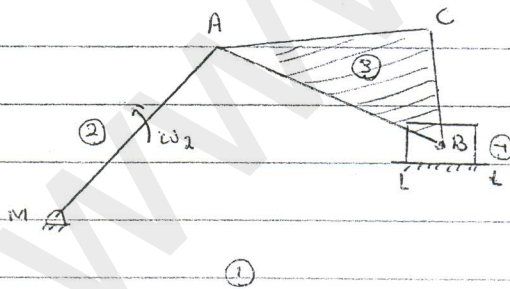
5. سرعت نقطه C:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A}$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B}$$

چون $\vec{V}_{C/A}$ عمود بر CA و $\vec{V}_{C/B}$ عمود بر BC باشد لذا از تالیق در یک راستای برداری بالا $\vec{V}_C$ بدست می آید.

مثال: منظور از سرعت دایره ای در یک slider crank mechanism



$$MA = 2''$$

$$AB = 3''$$

$$AC = 11.5''$$

$$\omega_2 = 600 \text{ rpm}$$

$$\text{lin } 5.23 \text{ ft/sec}$$

1. مقدار ω_2 و مقایسه آن با سرعت خطی

$$\omega_2 = \frac{2\pi N_2}{60} = \frac{2\pi \times 600}{60} = 62.8 \text{ rad/sec}$$

2. سرعت نقطه A:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_M + \vec{V}_{A/M} \Rightarrow V_{A/M} = \omega_2 \times AM = 62.8 \times \frac{2}{12} = 10.46 \text{ ft/sec} \perp MA/2$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

3- سرعت نقطه B

چون $\vec{v}_{B/A}$ عمود بر AB و $\vec{v}_B$ موازی LL است لذا مثلث برداری قابل ترسیم است

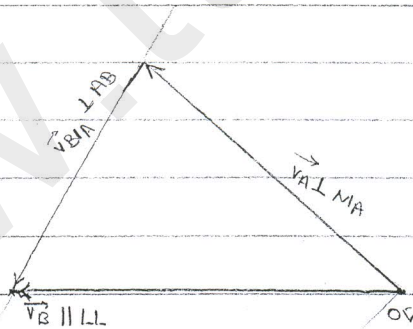
4- با استفاده از متیاس

$$v_B = 10.46 \text{ ft/sec}$$

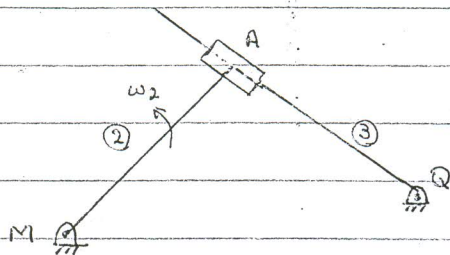
$$v_{B/A} = 6.54 \text{ ft/sec}$$

5- سرعت دورانی چرخ

$$\omega_3 = \frac{v_{B/A}}{AB} = \frac{6.54}{3} \times 12 = 26.16 \text{ rad/sec (ساعت)}$$



مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت ماشین
inverted slider crank



$$MA = 2''$$

$$MQ = 4.1''$$

$$n_2 = 600 \text{ rpm}$$

$$Q_A = 3''$$

ترسیم:

$$r = 5.23 \text{ ft/sec}$$

۱. دیاگرام v و مقیاس مناسب بافتخاب می کنیم

$$\vec{V}_A = \vec{V}_M + \vec{V}_{A/M}$$

۲. سرعت نقطه A (روی لینک ۲) (A_2)

$$V_{A/M} = AM \cdot \omega_2 = \frac{2}{12} \times \frac{2\pi 600}{60} = 10.46 \text{ ft/sec } \perp AM$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_M + \vec{V}_{A/M}$$

۳. سرعت نقطه A (نقطه A روی لینک ۳) (A_3)

چون $\vec{V}_A \perp QA$ و $\vec{V}_{A/M} \parallel AQ$ می باشد از اصلیات بردارهای قابل ترسیم است.

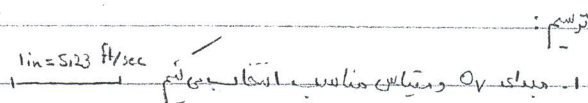
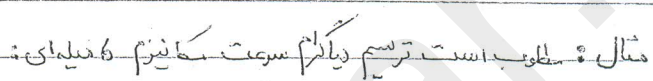
$$V_{A3/A2} = ?$$

۴. سه مقیاس:

$$V_{A3} = 16 \times 5.23$$

۵. سرعت دورانی لینک ۳:

$$\omega_3 = \frac{V_{A3}}{Q_A} = \frac{16 \times 5.23 \times 12}{3} = 12.55 \text{ rad/sec (ساعت)}$$



$$\vec{V}_{A_2} = \vec{V}_{A_1} + \vec{V}_{A_2/A_1}$$

3. سرعت نقطه B: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$

چون $\vec{V}_B \perp \vec{L}_{BA}$ و $\vec{V}_B \perp \vec{L}_{CB}$ باشد لذا بردار $\vec{V}_B$ برای قابل ترسیم است

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A}$$

4. سرعت نقطه C

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B}$$

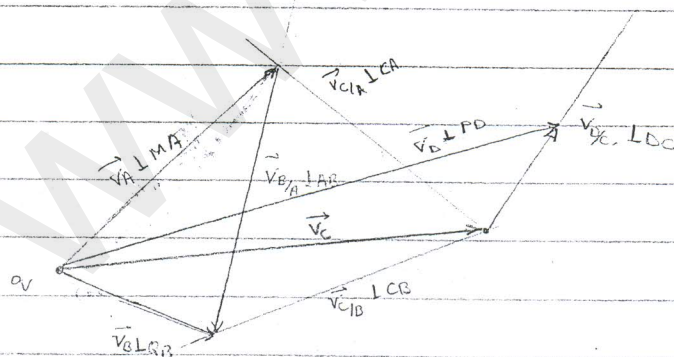
چون $\vec{V}_A \perp AC$ و $\vec{V}_{C/A} \perp AC$ و $\vec{V}_B \perp BC$ و $\vec{V}_{C/B} \perp BC$ و $\vec{V}_C$ بردار است

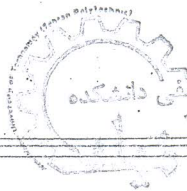
$$\vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{D/C}$$

5. سرعت نقطه D

چون $\vec{V}_D \perp AD$ و $\vec{V}_{D/C} \perp DC$ از مثلث برداری قابل رسم است

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{5,23 \times 19,9}{1,9 \times 12} = 62,8 \text{ rad/sec} \quad \text{ساعت} \\ \omega_4 &= \frac{V_B}{OB} = \frac{5,23 \times 2,6 \times 12}{1,75} = 93,6 \text{ rad/sec} \quad \text{ساعت} \\ \omega_5 &= \frac{V_{D/C}}{DC} = \frac{5,23 \times 1,6 \times 12}{2,1} = 17,9 \text{ rad/sec} \quad \text{مضاد} \\ \omega_6 &= \frac{V_D}{PD} = \frac{5,23 \times 3,3 \times 12}{2} = 103,55 \text{ rad/sec} \quad \text{ساعت} \end{aligned}$$





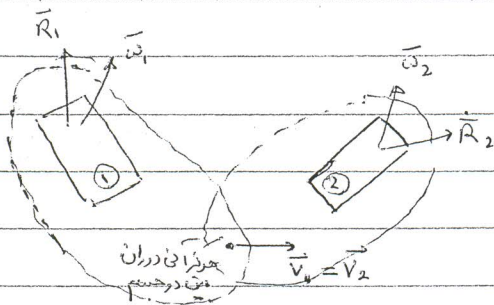
شورای صنفی دانشجو

objective 7:

تعیین حرکتی دوران:

حرکتی دوران بین دو جسم عبارت است از نقطه ای در یکی در جسم ریا در امتداد فرضی دو جسم قرار گرفته و

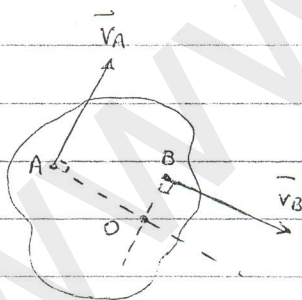
velocity آن بین دو جسم در آن نقطه لیسان باشد



حالات خاصی که حرکتی دوران یک جسم زمین:

چون velocity زمین صفر فرض می شود حرکتی دوران جسم زمین عبارت است از نقطه ای در یکی جسم

ریا در امتداد فرضی آن قرار گرفته و velocity آن صفری باشد



0 حرکتی دوران بین جسم زمین

اگر جسمی تنها انتقال داشته باشد حرکتی دوران آن در

بی قابلیت قرار دارد

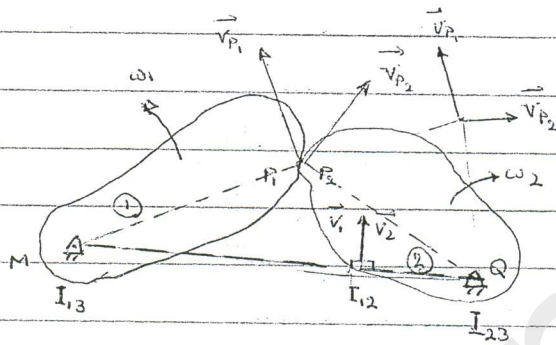
تعداد کل مرکزاتی دوران بین دو جسم برابر است با:

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

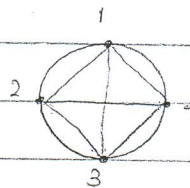
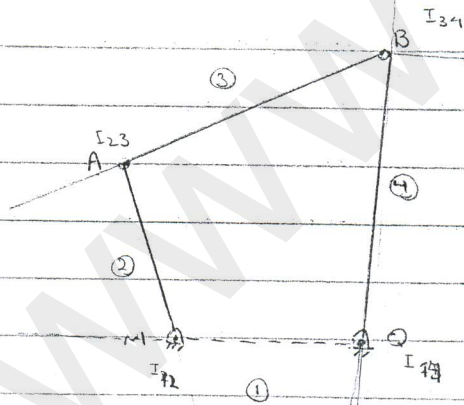
Kennedy's Theorem

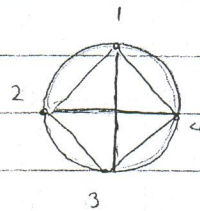
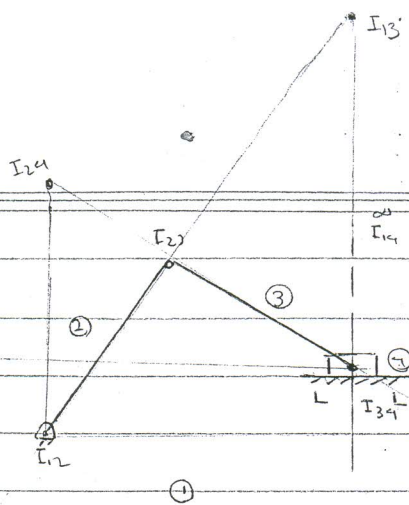
هر سه جسم صلب نسبت به هم مجبوراً دارای محور حرکتی در آن می باشند که روی یک خط مستقیم قرار دارند.

اثبات:



$$I_{13} I_{12} \times \omega_1 = I_{12} I_{23} \times \omega_2$$





Unit III : Acceleration Analysis of Linkages :

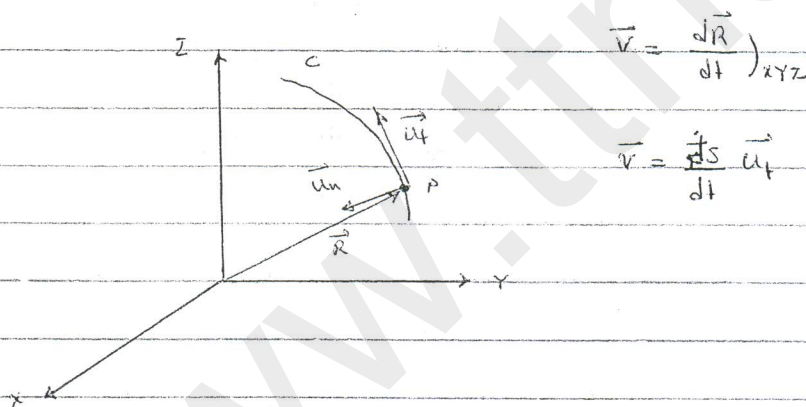
objective 1 :

تعریف شتاب در گره های مختلف : مختلف

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} \Big|_{xyz} \quad \text{: Velocity - تعریف}$$

$$\vec{A} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \Big|_{xyz} \quad \text{: Acceleration - تعریف}$$

Part I : شتاب در گره های مختلف بر حسب مختصات مسیر



$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} \Big|_{xyz}$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_t$$

$$\vec{A} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{ds} \frac{ds}{dt}$$

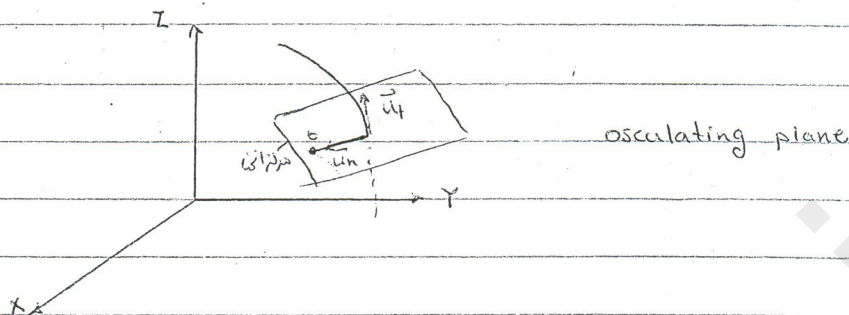
$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{\vec{u}_n}{\rho}$$

از اینجا داریم :

$$\vec{A} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{u}_t + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{\vec{u}_n}{\rho}$$

از اینجا داریم :

مشتق انتخاب $\vec{u}_n$ بردار عمود بر انحنای مسیر و در osculating plane



Part II: شتاب بردار در مختصات استوانه‌ای

$$\vec{A} = \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{V} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{A} = \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{A} = (\ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - \dot{r} \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ddot{z} \vec{u}_z)$$

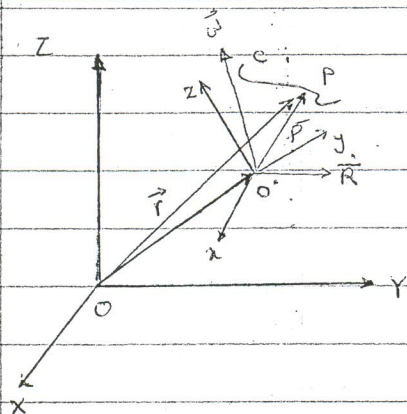
$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

$$\vec{A} = (\ddot{r} - \dot{r} \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + \ddot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

Parts III, IV, V: شتاب ذره در دو مختصات

فرض کنید ذره‌ای متحرک P در داخل محور مختصات xyz در حال حرکت است. محور مختصات xyz

متحرک دارای حرکت کلی $\vec{R}$ و نسبت به محور مختصات ایستایی XYZ می‌باشد.



مکانیسم سرعت و شتاب دایره‌ای $\vec{P}$ را در هر لحظه

مکانیسم xyz تعیین کنیم.

$\vec{R}$ بردار موقعیت مرکز مختصات xyz در XYZ

$\vec{P}$ بردار موقعیت ذره‌ی P در xyz

همواره رابطی برداری برقرار است:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{P}$$

همواره مشتق رابطی بالا نسبت به زمان در مختصات اینرسی XYZ برقرار است:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_{XYZ} \quad (a)$$

چون P در مختصات متحرک xyz حرکت می‌کند، تغییر شده‌ی مشتق آن در مختصات اینرسی XYZ نسبت به زمان

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{P} \quad (b)$$

در معادله (a) قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{P}$$

$$\vec{V}_{XYZ} = \dot{\vec{R}} + \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{P}$$

برای کاسه شتاب از سرعت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\bigg|_{xyz} = \frac{d\vec{R}}{dt}\bigg|_{xyz} + \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\bigg|_{xyz} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\bigg|_{xyz} \times \vec{P} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{P}}{dt}\bigg|_{xyz} \quad (c)$$

چون $\vec{V}_{xyz}$ و $\vec{P}$ در مختصات متحرک xyz تعریف می شوند ولی مشتق آن ها نسبت به زمان در مختصات ثابت.

$$\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\bigg|_{xyz} = \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\bigg|_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} \quad \text{این می باشد و لذا}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt}\bigg|_{xyz} = \frac{d\vec{P}}{dt}\bigg|_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{P}$$

در رابطه (c) قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\bigg|_{xyz} &= \frac{d\vec{R}}{dt}\bigg|_{xyz} + \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\bigg|_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\bigg|_{xyz} \times \vec{P} \\ &\quad + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\bigg|_{xyz} \right) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{P}) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\vec{A}_{xyz} = \ddot{\vec{R}} + \vec{A}_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{P})$$

در معادلات فوق:

$\vec{V}_{xyz}$ = سرعت ذره در مختصات مطلق XYZ

$\vec{A}_{xyz}$ = شتاب ذره در مختصات مطلق XYZ

$\ddot{\vec{R}}$ = سرعت مرکز مختصات متحرک xyz در مختصات مطلق XYZ

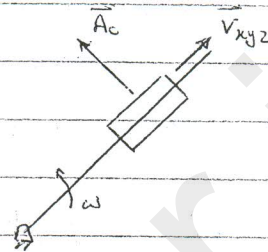
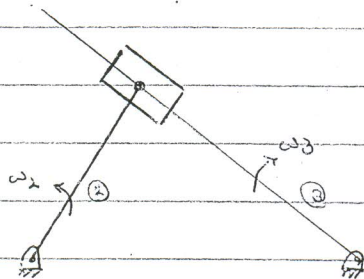
$\vec{R}$ = شتاب مرکز مختصات متحرک xyz در مختصات مطلق XYZ

$\vec{V}_{xyz}$ = سرعت ذره P در مختصات متحرک xyz

$\vec{A}_{xyz}$ = شتاب ذره P در مختصات متحرک xyz

Coriolis acceleration: $2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}$

وزن دانی بوجهی ایک جسم داری دربان باشد و هفران سرعت خطی هم داشته باشد



خوب شتاب در این از قانون دست راست بدست می آید

objective 2

کاربرد اعداد مختلط :

$$R = re^{j\theta} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r = e^{j\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_\theta = je^{j\theta}$$

حال برای بدست آوردن شتاب درباره از رابطه بالا مشتق می گیریم :

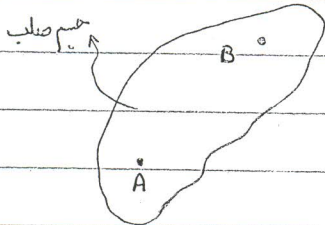
مشتق دوم اعداد مختلط :

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \ddot{r}e^{j\theta} + j\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta} + j\dot{\theta}\dot{r}e^{j\theta} + jr\ddot{\theta}e^{j\theta} - r\dot{\theta}^2e^{j\theta}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e^{j\theta} + j(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e^{j\theta}$$

objective 3

ثبت شدن در نقطه از یک جسم صلب



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

اثبات شد:

از رابطه سرعت نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$\left(\frac{d\vec{V}_B}{dt} \right)_{xyz} = \left(\frac{d\vec{V}_A}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$$

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})}_{\vec{A}_{B/A}}$$

نتیجه:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}$$

$$\vec{A}_{B/A} = \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}}_{\vec{A}_{B/A}^t} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})}_{\vec{A}_{B/A}^r}$$

نکته:

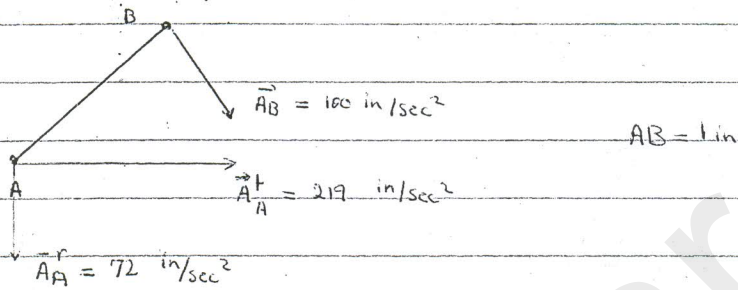
$$\vec{A}_{B/A}^t = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \perp AB$$

$$\vec{A}_{B/A}^r = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) \parallel AB$$

مقدار $A_{B/A}^r$ مشخص است اما جهت و رسم دیگر از سرعت

25.

مثال 3: از جسم صلب AB شتاب نقاط A و B در شکل نشان داده شده اند. دیاگرام شتاب را رسم کنید.



$$1 \text{ in} = 50 \text{ m/sec}^2$$

ترسیم 1: مقیاس مناسب را رسم کنید.

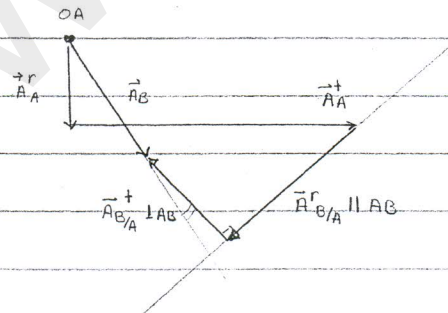
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

2. شتاب نقطه B:

بر حسب مؤلفه ها

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^r + \vec{a}_A^t + \vec{a}_{B/A}^r + \vec{a}_{B/A}^t$$

چون $\vec{a}_{B/A}^r$ موازی AB و $\vec{a}_{B/A}^t$ عمود بر AB می باشند لذا چندضلعی برداری قابل ترسیم است:



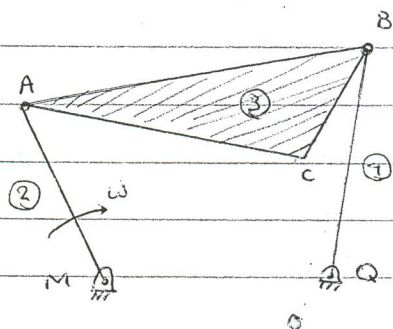
$$\alpha_{AB} = \frac{a_{B/A}^t}{AB} = \frac{96}{1} = 96 \text{ rad/sec}^2 \quad (\text{مثبتی})$$

3. شتاب دورانی میله AB

objective 5

روش تریگ دیگرام شتاب شتابها

مثال: مکانیزم چهارمیلای زیر فرض است: مطلوب است تریگ دیگرام شتاب



$$MA = 4''$$

$$AB = 8''$$

$$QB = 5.5''$$

$$MQ = 5''$$

$$\omega_2 = 99.2 \text{ rad/sec}$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\omega_3 = 30 \text{ rad/s}$$

$$\omega_4 = 74.2 \text{ rad/s}$$

$$a_n = 1000 \text{ ft/sec}^2$$

1. مبدأ OA و تریگ مناسب انتخاب می شود.

$$\vec{A}_A = \vec{A}_{A/M} + \vec{A}_{M/M} = \vec{A}_{A/M}^r + \vec{A}_{A/M}^t \quad \text{2. شتاب نسبی A:}$$

$$A_{A/M}^r = MA \times \omega_2^2 = \frac{4}{12} \times (99.2)^2 = 2960 \text{ ft/sec}^2 \quad \parallel AM$$

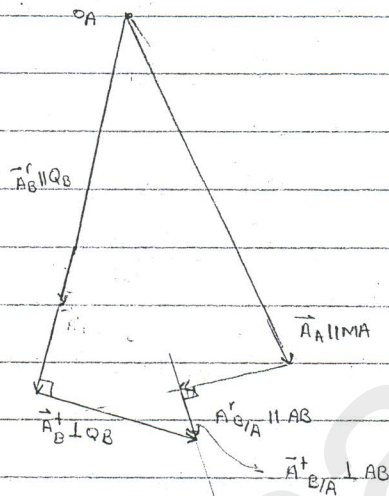
3. شتاب نسبی B:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A} \Rightarrow \vec{A}_B^r + \vec{A}_B^t = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}^r + \vec{A}_{B/A}^t \quad (a)$$

$$A_B^r = BQ \times \omega_4^2 = \frac{5.5}{12} \times (74.2)^2 = 2520 \text{ ft/sec}^2 \quad \parallel QB$$

$$A_{B/A}^r = AB \times \omega_3^2 = \frac{8}{12} \times 30^2 = 600 \text{ ft/sec}^2 \quad \parallel AB$$

چون $\vec{A}_B^t$ عمود بر QB و چون $\vec{A}_{B/A}^t$ عمود بر AB می باشد لذا جنجالی برداری متساوی تریگ است:

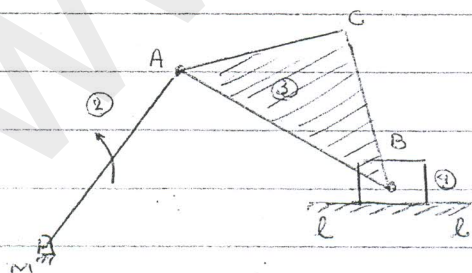


۹: با توجه به مقیاس داریم: جواب $\vec{A}_B^t$ و $\vec{A}_B^t$ را خود به خودی (۹) معلوم می شود. جواب آن مایانود به مقیاس معلوم می شود.

۵: شتاب دورانی: ساعت $\alpha_3 = \frac{A_{B/A}^t}{AB} = \frac{120}{8/12} = 180 \text{ rad/sec}^2$

ساعت $\alpha_1 = \frac{A_{B/Q}^t}{QB} = \frac{1150}{5.5/12} = 2510 \text{ rad/sec}^2$

مثال: طرح استریم دیاگرام شتاب مکانیزم slider-crank:



$MA = 2''$

$AB = 3''$

$AC = 1.5''$

$\omega_2 = 52.8 \text{ rps}$

$\omega_3 = 26.16 \text{ rps}$

$\alpha_2 = 0$

$$1 \text{ in} = 200 \text{ ft/sec}^2$$

1- ابتدا OA و OB مناسب انتخاب می کنیم:

$$\vec{A}_A = \vec{A}_M + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}_{A/M} + \vec{A}_{A/M}^t \quad \text{2- شتاب نقطه A:}$$

$$A_{A/M}^t = AM \cdot \omega_2^2 = \frac{2}{12} \times 62.8^2 = 657.6 \quad \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2} \parallel MA$$

3- شتاب نقطه B:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A} = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}^t + \vec{A}_{B/A}^n \quad \text{a)}$$

چون $\vec{A}_B$ موازی AB است و $\vec{A}_{B/A}^n$ عمود بر AB می باشد لذا چنانچه برای قابل ترسیم است:

$$A_{B/A}^t = AB \times \omega_3^2 = \frac{3}{12} \times (26.16)^2 = 171 \quad \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2} \parallel AB$$

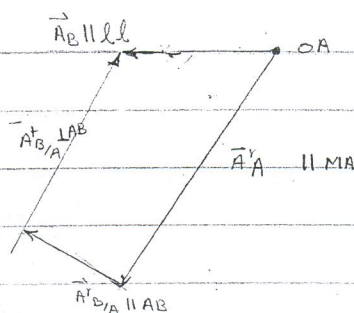
4- از نتایج:

$$A_B = 397 \quad \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2}$$

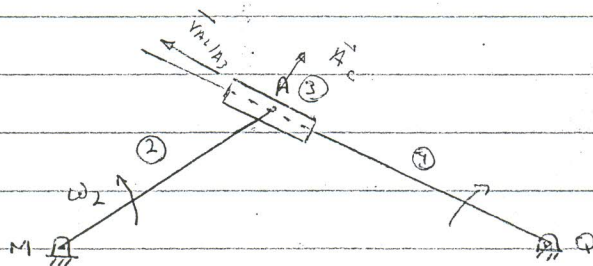
$$A_{B/A}^t = 171 \quad \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2}$$

12- از $\vec{A}_{B/A}^t \rightarrow \vec{A}_B$ از مثلث قائم الزامی می شود:

$$\alpha_3 = \frac{A_{B/A}^t}{AB} = \frac{171}{3/12} = 1985 \quad \text{rad/sec}^2 \quad \text{مشتاتی}$$



مثال ۳: مطلوب است ترسیم دیاگرام شتاب مطابق زیر



$$MA = 2''$$

$$MQ = 4.1''$$

$$\omega_2 = 62.8 \text{ rps}$$

$$VA = 10.56 \frac{\text{ft}}{\text{sec}}$$

$$VA_{2/A3} = 9.93 \frac{\text{ft}}{\text{sec}}$$

$$QA = 3''$$

$$\alpha_2 = 0$$

ترسیم:

$$1 \text{ in} = 150 \text{ FPS}$$

۱. محاسبه شتاب مناسب انتقالی بین لینک

$$\vec{A} = \vec{A}^r + \vec{A}^t$$

$$\vec{A}_{A_2} = \vec{A}_M + \vec{A}_{A_2/M} = \vec{A}_{A_2/M} = MA \omega_2^2$$

۲. شتاب انتقالی A:

$$= \frac{2}{12} \times (62.8)^2 = 657 \text{ FPS}^2 \parallel MA$$

۳. شتاب

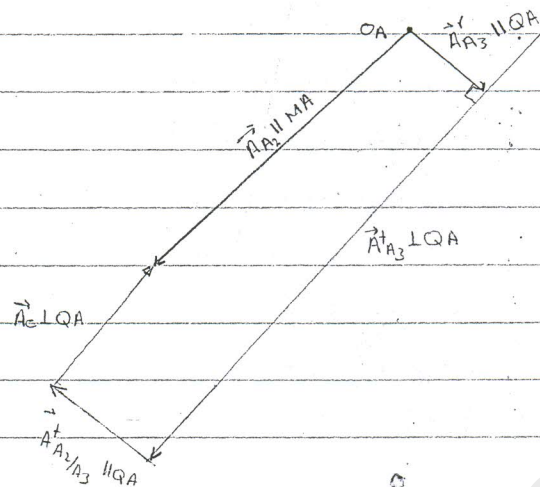
$$\vec{A}_{A_2} = \vec{A}_{A_3} + \vec{A}_{A_2/A_3} + \vec{A}_C = \vec{A}_{A_3} + \vec{A}_{A_2/A_3}^r + \vec{A}_{A_2/A_3}^t + \vec{A}_C$$

برای محاسبه شتاب انتقالی $\vec{A}_{A_2/A_3}^t$ از رابطه $\vec{A}_{A_2/A_3}^t = 2\omega_3 \times \vec{VA}_{2/A3}$ استفاده می‌کنیم.

چون $\vec{A}_{A_2}^t$ عمود بر QA و $\vec{A}_{A_2/A_3}^t$ عمود بر MA است، می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$A_{A_3}^r = QA \omega_3^2 = \frac{3}{12} \times (12.55)^2 = 39.9 \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2} \parallel QA$$

$$A_C = 2\omega_3 \times VA_{2/A3} = 2 \times 12.55 \times 9.93 = 249 \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2} \perp QA$$



4- ارضیاس

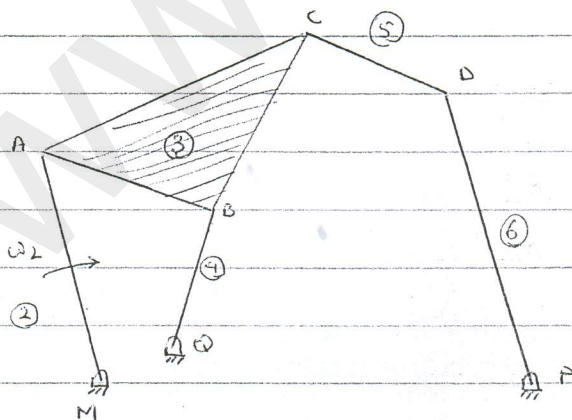
$$A_A^+ = 857 \text{ ft/sec}^2$$

$$A_A^+ A_A^+ =$$

$$\alpha_3 = \frac{A_A^+}{QA} = \frac{857}{3/12} = 3428 \text{ rad/sec}^2 \quad \text{مثالی}$$

5. شتاب دورانی میل 3:

مثال:



$$\omega_2 = 79.2 \text{ rps}$$

$$V_A = 15.7 \text{ Fps}$$

$$\omega_3 = 62.8 \text{ rps}$$

$$\omega_4 = 93.6 \text{ rps}$$

$$\omega_5 = 17.9 \text{ rps}$$

$$\omega_6 = 103.55$$

$$1\text{ in} = 500 \text{ Ft/sec}^2$$

1- محاسبه $\vec{a}_A$ و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم.

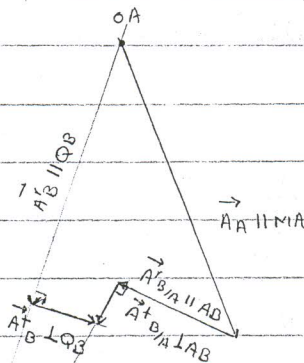
$$\vec{a}_A = \vec{a}_M + \vec{a}_{N/M} = \vec{a}_{A/M} \quad \text{2- محاسبه A}$$

$$a_{A/M} = M A \times \omega_2^2 = \frac{2}{12} \times (99.2)^2 = 1479 \text{ Ft/sec}^2 \parallel M A$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad \text{3- محاسبه نقطه B}$$

$$a_B = Q B (\omega_1)^2 = \frac{1.75}{12} \times (93.6)^2 = 1278 \text{ Ft/sec}^2 \parallel Q B$$

$$a_{B/A} = A B \times (\omega_3)^2 = \frac{1.88}{12} \times (62.8)^2 = 618 \text{ Ft/sec}^2 \parallel A B$$

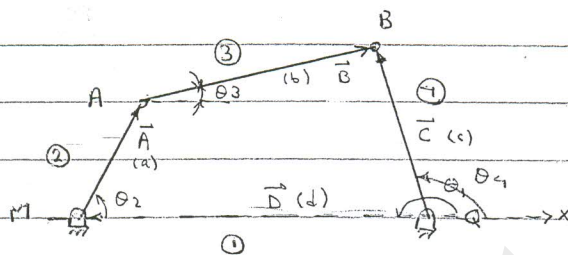


Unit III

Displacement velocity and Acceleration Analysis of Linkage Using Analytical Methods

objective 1

تحلیل مکانیزم چهار میلانی



معادله درمی حرکت مکانیزم بالا رابطه‌ای برداری زیر برقرار است:

$$\vec{D} + \vec{A} + \vec{B} - \vec{C} = 0$$

$$D = d e^{j\theta_1}$$

$$A = a e^{j\theta_2}$$

$$B = b e^{j\theta_3}$$

$$C = c e^{j\theta_4}$$

درستایید با اعداد مختلط:

$$d e^{j\theta_1} + a e^{j\theta_2} + b e^{j\theta_3} - c e^{j\theta_4} = 0$$

نذاریم:

با تقابل معادله‌ی بالا به سمت حقیقی و موهومی:

$$d \cos \theta_1 + a \cos \theta_2 + b \cos \theta_3 - c \cos \theta_4 = 0$$

$$d \sin \theta_1 + a \sin \theta_2 + b \sin \theta_3 - c \sin \theta_4 = 0$$

در اینجا $\theta_1 = 180^\circ$

$$\begin{cases} d + a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2 - c \cos \theta_4 = 0 \\ a \sin \theta_2 + b \sin \theta_3 - c \sin \theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$[-d + a \cos \theta_2 - c \cos \theta_4]^2 = (b \cos \theta_3)^2$$

$$\left[\frac{a^2 \sin^2 \theta_2}{a^2} + \frac{c^2 \sin^2 \theta_4}{c^2} - 2ac \sin \theta_2 \sin \theta_4 \right] = (-b \cos \theta_3)^2$$

$$d^2 + a^2 \cos^2 \theta_2 + c^2 \cos^2 \theta_4 - 2da \cos \theta_2 + 2dc \cos \theta_4 - 2ac \cos \theta_2 \cos \theta_4 = b^2 \cos^2 \theta_3$$

$$a^2 \sin^2 \theta_2 + c^2 \sin^2 \theta_4 - 2ac \sin \theta_2 \sin \theta_4 = b^2 \cos^2 \theta_3$$

$$d^2 + a^2 - b^2 + c^2 = 2ad \cos \theta_2 + 2dc \cos \theta_4 - 2ac [\cos \theta_2 \cos \theta_4 +$$

$$\sin \theta_2 \sin \theta_4] = 0$$

$$K_1 \cos \theta_1 - K_2 \cos \theta_2 + K_3 = \cos (\theta_2 - \theta_4)$$

$$K_1 = d/a$$

$$K_2 = d/c$$

$$K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

$$\sin \theta_4 = \frac{2 \tan \theta_4/2}{1 + \tan^2 \theta_4/2} \quad \cos \theta_4 = \frac{1 - \tan^2 \theta_4/2}{1 + \tan^2 \theta_4/2} \quad \text{بر حسب } \tan \theta_4/2$$

35

$$A \tan^2 \theta_4 + B \tan \theta_4 + C = 0$$

$$A = \cos \theta_2 + k_3 - k_2 - k_2 \cos \theta_3$$

$$B = -2 \sin \theta_2$$

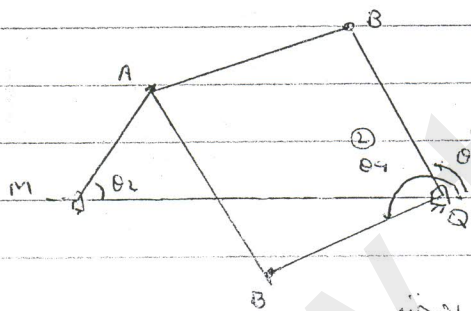
$$C = k_1 + k_3 - (1 + k_2) \cos \theta_2$$

$$k_1 = \frac{d}{a}$$

$$k_2 = \frac{d}{c}$$

$$k_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

$$\tan \frac{\theta_4}{2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$



working space : $B^2 - 4AC > 0$

برای این دو شکل مختلف برای شروع حرکت داریم

به همین دلیل $\pm$ داریم

working space برای θ_2 است

هر دو MA Link و BC می تواند 360 بچرخد

در صورتی که طول این دو ضلع با هم و AB و MQ با هم بزرگتر باشند

محاسبه ی رابطی سرعت

از معادله ی تعادل نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$de^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} = 0$$

مشتق رابطی بالا نسبت به زمان:

$$37 \quad a j \omega_2 e^{j\theta_2} + b j \omega_3 e^{j\theta_3} - c j \omega_4 e^{j\theta_4} = 0$$

بأنسب در ف:

$$\begin{cases} a\omega_2 \sin \theta_2 - b\omega_3 \sin \theta_3 + c\omega_4 \sin \theta_4 = 0 \\ a\omega_2 \cos \theta_2 + b\omega_3 \cos \theta_3 - c\omega_4 \cos \theta_4 = 0 \end{cases}$$

درستاده و در کپول و در وید:

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2}{b} \frac{\sin(\theta_4 - \theta_2)}{\sin(\theta_3 - \theta_4)}$$

$$\omega_4 = \frac{a\omega_2}{c} \frac{\sin(\theta_2 - \theta_3)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)}$$

کامپیو رابطه شتاب:

از رابطه سرعت نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$\begin{aligned} a\ddot{\alpha}_2 e^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2} + b\ddot{\alpha}_3 e^{j\theta_3} - b\omega_3^2 e^{j\theta_3} - c\ddot{\alpha}_4 e^{j\theta_4} \\ + c\omega_4^2 e^{j\theta_4} = 0 \end{aligned}$$

بأنسب در ف:

$$\begin{aligned} -a\ddot{\alpha}_2 \sin \theta_2 - a\omega_2^2 \cos \theta_2 - b\ddot{\alpha}_3 \sin \theta_3 - b\omega_3^2 \cos \theta_3 + c\ddot{\alpha}_4 \sin \theta_4 \\ + c\omega_4^2 \cos \theta_4 = 0 \end{aligned}$$

$$a\ddot{\alpha}_2 \cos \theta_2 - a\omega_2^2 \sin \theta_2 + b\ddot{\alpha}_3 \cos \theta_3 - b\omega_3^2 \sin \theta_3 - c\ddot{\alpha}_4 \cos \theta_4 \quad 38$$

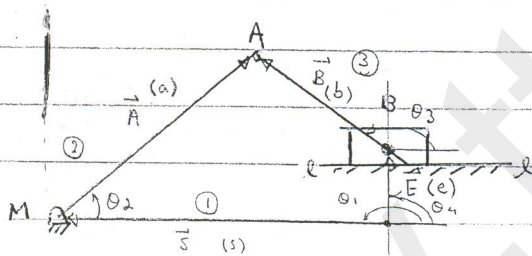
$$+ C\omega_1^2 \sin\theta_1 = 0$$

حال برای معادله داریم:

$$\alpha_3 = \frac{CD - AF}{AE - BD}$$

$$\alpha_4 = \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

آرایش تغییر مکان مکانیزم slider crank:



محاسب ابعاد مکانیزم:

$$\vec{J}_1 + \vec{A} - \vec{B} - \vec{E} = 0 \Rightarrow J_1 e + J_2 a - J_3 b - J_4 e = 0$$

$$s \cos\theta_1 + a \cos\theta_2 - b \cos\theta_3 - e \cos\theta_4 = 0$$

با تبدیل داریم:

$$s \sin\theta_1 + a \sin\theta_2 - b \sin\theta_3 - e \sin\theta_4 = 0$$

$$\theta_1 = 0, \theta_4 = 90$$

$$-s + a \cos\theta_2 - b \cos\theta_3 = 0$$

$$a \sin\theta_2 - b \sin\theta_3 - e = 0$$

$$(-s + a \cos \theta_2)^2 = (b \cos \theta_3)^2 \Rightarrow s^2 + a^2 \cos^2 \theta_2 - 2s a \cos \theta_2 = b^2 \cos^2 \theta_3$$

$$(-e + a \sin \theta_2)^2 = (b \sin \theta_3)^2 \Rightarrow e^2 + a^2 \sin^2 \theta_2 - 2e a \sin \theta_2 = b^2 \sin^2 \theta_3$$

$$Ls^2 + Ms + N = 0$$

$$L = 1$$

$$M = -2a \cos \theta_2$$

$$N = a^2 + e^2 - b^2 - 2ae \sin \theta_2$$

$$s = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}$$

$$\sin \theta_3 = \frac{1}{b} [a \sin \theta_2 - e] \Rightarrow \theta_3 = \sin^{-1} \frac{1}{b} [a \sin \theta_2 - e]$$

محاسبه سرعت

$$s \dot{\theta}_1 + a \omega_2 \dot{\theta}_2 - b \dot{\theta}_3 = 0$$

$$s \cos \theta_1 - a \omega_2 \sin \theta_2 + b \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 = 0$$

$$\theta_1 = 180$$

$$s \sin \theta_1 + a \omega_2 \cos \theta_2 - b \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -s - a \omega_2 \sin \theta_2 + b \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 = 0 \\ a \omega_2 \cos \theta_2 - b \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$a \omega_2 \cos \theta_2 - b \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 = 0$$

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2}{b} \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3}$$

$$\dot{S} = a\omega_2 \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\cos\theta_3}$$

کاسپی نسبت

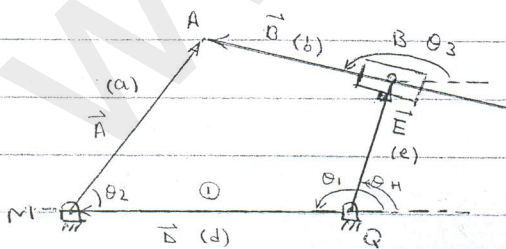
$$\ddot{S} e^{j\theta_1} + a j \ddot{\theta}_2 e^{j\theta_2} - a \omega_2^2 e^{j\theta_2} - b j \ddot{\theta}_3 e^{j\theta_3} + b \omega_3^2 e^{j\theta_3} = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{S} \cos\theta_1 - a \ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - a \omega_2^2 \cos\theta_2 + b \ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + b \omega_3^2 \cos\theta_3 = 0 \\ \ddot{S} \sin\theta_1 + a \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 + a \omega_2^2 \sin\theta_2 - b \ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 + b \omega_3^2 \sin\theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\alpha}_3 = \frac{a \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - a \omega_2^2 \sin\theta_2 + b \omega_3^2 \sin\theta_3}{b \cos\theta_3}$$

$$\ddot{S} = \left[-a \ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - a \omega_2^2 \cos\theta_2 + b \ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + b \omega_3^2 \cos\theta_3 \right]$$

آبایز تغییر مکان مکانیزم : Inverted slider crank



$$\vec{D} + \vec{A} - \vec{B} - \vec{E} = 0$$

بر حسب اعداد مختلط :

$$de^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} - be^{j\theta_3} - ee^{j\theta_4} = 0 \quad \theta_1 = 180^\circ$$

$$-d \quad \theta_3 + 90 + 180 - \theta_4 = 360$$

$$d \cos \theta_1 + a \cos \theta_2 - b \cos \theta_3 - e \cos \theta_4 = 0 \quad \theta_3 - \theta_4 = 90^\circ$$

$$\theta_3 = 90 + \theta_4 \Rightarrow \omega_3 = \omega_4$$

$$d \sin \theta_1 + a \sin \theta_2 - b \sin \theta_3 - e \sin \theta_4 = 0 \quad \alpha_3 = \alpha_4$$

$$-d + a \cos \theta_2 - b \cos \theta_3 - e \cos \theta_4 = 0$$

$$a \sin \theta_2 - b \sin \theta_3 - e \sin \theta_4 = 0$$

$$\begin{cases} -d + a \cos \theta_2 - e \cos \theta_4 + b \sin \theta_4 = 0 \\ a \sin \theta_2 - e \sin \theta_4 - b \cos \theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$b = \frac{a \sin \theta_2 - e \sin \theta_4}{\cos \theta_4}$$

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \theta/2}{1 + \tan^2 \theta/2} \quad \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta/2}{1 + \tan^2 \theta/2}$$

$$K_1 \tan \frac{\theta_4}{2} + K_2 \tan \frac{\theta_4}{2} + K_3 = 0$$

$$\tan \theta_4/2 = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4K_1K_3}}{2K_1}$$

$$K_1 = d - e - a \cos \theta_2$$

$$K_2 = 2a \sin \theta_2$$

$$K_3 = a \cos \theta_2 - d - e$$

رابطه‌ی سرعت:

$$a j \omega_2 e^{j \theta_2} - b e^{j \theta_3} - b j \omega_3 e^{j \theta_3} - e j \omega_4 e^{j \theta_4} = 0$$

$$\begin{cases} -a \omega_2 \sin \theta_2 - b \cos \theta_3 + b \omega_3 \sin \theta_3 + e \omega_4 \sin \theta_4 = 0 \\ a \omega_2 \cos \theta_2 - b \sin \theta_3 - b \omega_3 \cos \theta_3 - e \omega_4 \cos \theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$\omega_3 = \omega_4$$

$$\theta_3 = 90^\circ + \theta_4$$

$$\omega_4 = \omega_3 = \frac{a \omega_2}{b} \sin(\theta_2 - \theta_4)$$

$$b \left[\frac{a \omega_2}{b} \{ b \cos(\theta_4 - \theta_2) - e \sin(\theta_4 - \theta_2) \} \right]$$

رابطه‌ی شتاب:

$$a j \alpha_2 e^{j \theta_2} - a \omega_2^2 e^{j \theta_2} - b e^{j \theta_3} - b j \omega_3 e^{j \theta_3} + b j \omega_3 e^{j \theta_3} - b j \alpha_3 e^{j \theta_3}$$

$$+ b \omega_3^2 e^{j \theta_3} - e j \alpha_4 e^{j \theta_4} + e \omega_4^2 e^{j \theta_4} = 0 \quad \theta_3 = 90^\circ + \theta_4$$

$$-a \alpha_2 \sin \theta_2 - a \omega_2^2 \cos \theta_2 - b \cos \theta_3 + 2 b \omega_3 \sin \theta_3 + b \alpha_3 \sin \theta_3 + b \omega_3^2 \cos \theta_3$$

$$+ b \alpha_4 \sin \theta_4 + e \omega_4^2 \cos \theta_4 = 0$$

$$a \alpha_2 \cos \theta_2 - a \omega_2^2 \sin \theta_2 - b \sin \theta_3 + 2 b \omega_3 \cos \theta_3 - b \alpha_3 \cos \theta_3 + b \omega_3^2 \sin \theta_3$$

$$- e \alpha_4 \cos \theta_4 + e \omega_4^2 \sin \theta_4 = 0$$

$$\alpha_4 = \frac{AF - CD}{AE - BD}$$

$$\bar{b} = \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

44

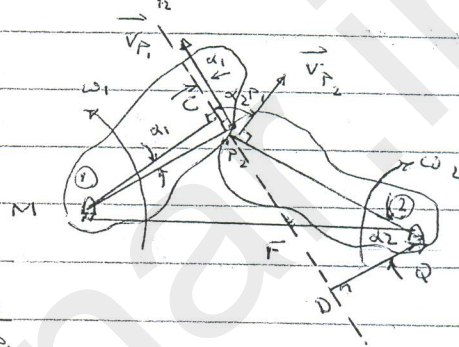
Unit V

Fundamental of Uniform Rotary Transmission

باید ترتیب نسبت سرعت بین دو جسم:

$$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} =$$

از روی شکل داریم:



$$V_{P1} = MP_1 \cdot \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{V_{P1}}{MP_1}$$

$$V_{P2} = QP_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{V_{P2}}{QP_2}$$

لذا داریم:

$$\text{Speed ratio: } SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{V_{P2} \cdot MP_1}{V_{P1} \cdot QP_2}$$

می خواهیم که حرکت مایه سرعت uniform منتقل شود:

باید در جهت انتقال سرعت های مماسی باشد در جهت + می تواند یکی نباشد در این صورت لغزش داریم.

برای تماس در جسم در عین انتقال سرعت در این شرط تماس:

$$V_{P1}^n = V_{P2}^n$$

خطوط QD و MC را بر روی انتقال مشترک nn عمودی کنیم.

$$V_{P_1}^n = V_{P_1} \cos \alpha_1 = V_{P_2}^n = V_{P_2} \cos \alpha_2 \quad \text{شرط تناسب}$$

$$Q_{P_2} = \frac{QD}{\cos \alpha_2} \quad \text{از روی شکل:}$$

$$MP_1 = \frac{MC}{\cos \alpha_1}$$

$$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{V_{P_2} MP_1}{V_{P_1} Q_{P_2}} = \frac{V_{P_2} \cos \alpha_2 MC}{V_{P_1} \cos \alpha_1 \cdot QD} \quad \text{از:}$$

پارامتر شرط تناسب:

$$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{MC}{QD}$$

دو مثلث QDF و MCF بنابر دو زاویه منتهی در یک خط:

$$\boxed{SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{MC}{QD} = \frac{MF}{QF} = \frac{FC}{FD}}$$

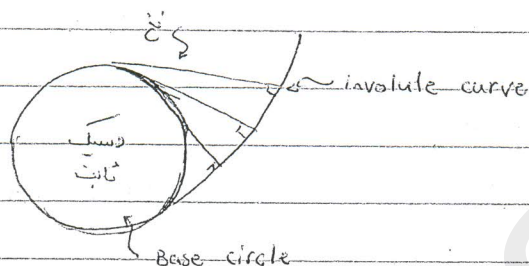
اگر تقاطع F کوچکترین ارتفاعی در آن باشد SR دارای ارتفاعی است و در مطلق ثابت باشد SR.

صورت uniform انتقال می یابد

x ثابت در کم و در زیاد مشترک خط العزمین را در یک نقطه قطع کند این نقطه باید مطلق ثابت باشد.

منحنى التلويث : (involute curve)

تجارت است از مکان هندیه ای انترای میخند از روزی یک دستک ثابت بازاری شود



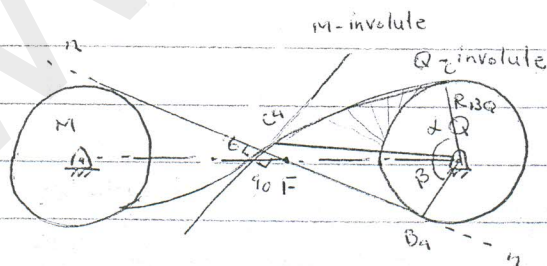
مذہبی التلوات دارای خواص زیاست

آه در هر تپه از منحنی ششخام اتحاد قول بخ بارشده است

۲. هر یک از اجزاء هر نقطه از مدخلی کل تعارض بخ میانشه و در مقابل است

3. همواره اختلال بین جا، فرد، درخت، مورخ، مورث، محوری برزخ منتهی *invelute* است.

اثبات ثابت برن نقیای F :



مهر خان بی بی خان ازان در عورتش مایه مشکوب در هفتی رسم کرد یعنی F روی خا سر و مشکوب در دشت

الشدوت

اثبات میثقی involute :

نقطه‌ی شکی، طول قوس دایره و ارتفاعی C تا B_1 :

$$\widehat{CB_1} = R_{BQ} (\alpha + \beta)$$

با توجه به خاصیت میثقی انولوت :

$$\widehat{CB_1} = C_1 B_1$$

نقطه‌ی شکی :

$$\tan \beta = \frac{C_1 B_1}{R_{BQ}} = \frac{R_{BQ} (\alpha + \beta)}{R_{BQ}} \Rightarrow$$

$$\tan \beta = \alpha + \beta \Rightarrow \boxed{\alpha = \tan \beta - \beta = \text{Inv}(\beta)}$$

Unit VI

Gear Tooth Technology :

objective 1 :

1. Base circle : (دایره جبهه)

جبهه است از دایره‌ی خارجی روی چرخ دنده که منحنی involute

دندانها از روی این ساخته شده است

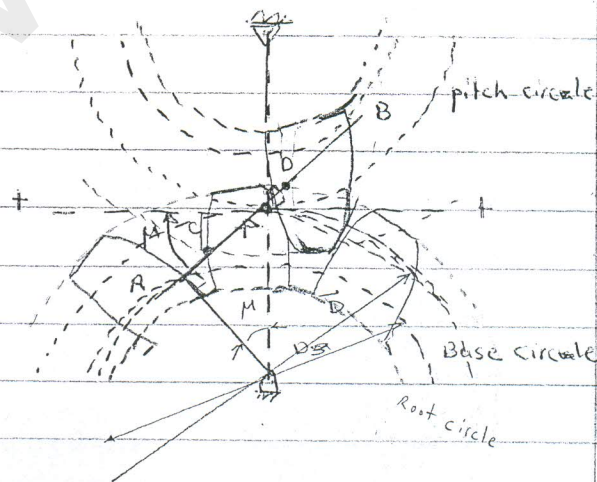
2. Pitch circle

جبهه است از دایره‌ی متداول یا دایره

به طوری که در چرخ دنده‌ی دیگر دایره‌ی تماس

باید بر هم تماس باشد این دایره روی چرخ دنده

خارجی می باشد



3. Root circle

جبهه است از دایره‌ی مری روی چرخ دنده که از دایره‌ی ریشه می گذرد

4. Addendum circle

عبارت است از دایره‌ی حقیقی روی چرخه‌ی دندانه‌ای از ابتدای ریشه‌ی حلقه‌ی دندانه‌ای

5. Pitch point

عبارت است از نقطه‌ی تماس دو دایره‌ی Pitch circle

6. Addendum (سرزنه‌چیا)

عبارت است از سرزنه‌ی دندانه‌ی دایره‌ی Addendum و Pitch از یک دندانه

7. Dedendum

عبارت است از ته‌ی دندانه‌ی دایره‌ی Pitch و root از دندانه

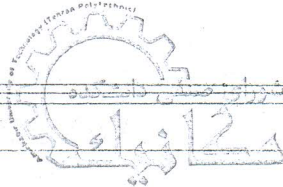
8. clearance

عبارت است از فاصله‌ی شعاعی بین دایره‌ی Addendum یک چرخه‌ی دندانه‌ی Pitch و چرخه‌ی دندانه‌ی root

9. working depth

عبارت است از عمق عمل یا فاصله‌ی شعاعی بین دایره‌ی Addendum دو چرخه‌ی دندانه‌ی دایره‌ی Pitch

clearance Addendum + Dedendum



10. Tooth Face

عبارت است قسمتی از سطح دندانه دارای منحنی $involute$ می باشد. این سمت کمر

است بین دایره $Base$ و $Addendum$

11. Tooth thickness

عبارت است از ضخامت طول قوس روی دایره $pitch$ از یک سطح دندانه تا نقطه مقابل

دندانه یا طول قوس بین دو $pitch$ point دندانه

12. Tooth flank

عبارت است از قسمتی از دندانه که دارای منحنی $involute$ نمی باشد. این سمت

کمر بین دایره $Base$ و $root$ یک چرخنده است

13. line of action

۱. تماس مشترک دایره $Base$ است

۲. هر نقطه از دندانه می تواند تماس بین دو چرخنده را درگیرری این خط قرار دارد

۳. در نقطه تماس بین دو دندانه عمود بر $profile$ منحنی های $involute$ است

۴. امتداد دایره اتصالی بین دو چرخنده را درگیرری این خط قرار می گیرد

۵. از $pitch$ point می گذرد

14. Pressure angle

عبارت است از زاویه بین خط عمل و مماس مشترک بین دایره Pitch. توجهی شود که امتداد نیروی انتقال بین دایره Pitch و دایره عمل می باشد.

15. circular pitch

عبارت است از طول قوس روی دایره Pitch از یک لقمه روی یک دایره تا لقمه بعدی روی دایره دیگر.

$$P_c = \frac{\pi D}{N} \quad \text{تعداد دایره ها: } N$$

16. Base pitch

عبارت است از طول قوس روی دایره Base از یک لقمه روی یک دایره تا لقمه بعدی روی دایره دیگر.

$$P_B = \frac{\pi D_B}{N} \quad \text{Base دایره: } D_B$$

$$R_B = R_P \cos \phi$$

از روی شکل داریم:

$$P_B = \frac{\pi D_B}{N} = \frac{\pi D_P \cos \phi}{N} \Rightarrow P_B = P_c \cos \phi$$

17. Diametral pitch

نسبت متریک عبارت است از عددی که برای استاندارد کردن چرخ دنده ها از آن استفاده می شود و برابر

$$P_D = \frac{Z}{D}$$

است یا :

$$P_D = \frac{1}{m_o}$$

که در این عبارت است از استانه در چرخ دنده ها در استانه را روی پای نامرکونی

قانون مهم : در چرخ دنده درگیر باید دارای Diametral pitch یکسان باشند

اگر در چرخ دنده پلان یک دنده در شرف از پلان هم باید یک دنده در شرف پس باید P_c های این ها مساوی باشد
بنابراین :

$$P_{c1} = P_{c2} \Rightarrow \frac{\pi D_1}{N_1} = \frac{\pi D_2}{N_2} \Rightarrow \frac{P_1}{N_1} = \frac{D_2}{N_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_{D1}} = \frac{1}{P_{D2}} \Rightarrow P_{D1} = P_{D2}$$

تایید درگیر چرخ دنده

از تعریف circular pitch داریم :

$$P_c = \frac{\pi D}{N} = \frac{\pi}{N/D} = \frac{\pi}{P_D} \Rightarrow P_c P_D = \pi$$

18. Angle of action

عبارت است از زاویه حرکتی روی چرخ دنده بین نقطه شروع و نقطه خاتمه درگیر بین دو چرخ دنده درگیر

اگر شعاع دایره ϕ دو چرخ دنده درگیر مساوی نباشند ، زاویه درگیر بین دو چرخ دنده درگیر با هم متفاوت

است

19. Pitch angle

عبارت است از زاویه مرکزی circular pitch در صورتی که pitch angle زیاد شود

نیروی بیشتری منتقل می کند.

20. Interference

عبارت است از شرایطی که یک سطح انحراف با یک سطح غیر انحراف بین دو چرخ دنده درگیر تماس حاصل

کند.

این شرایط در چعبه دنده های تورکار کرده بصورت زیر اتفاق می افتد:

۱- چعبه دنده های تورکار در چعبه دنده های تورکار در چعبه دنده درگیر می شوند و سر و صدای زیادی درگیر می کنند.

بوجود آید، چعبه دنده ارتعاش نماید و در نهایت چعبه دنده قفل کند و عامل آن تداخل بین چرخ دنده های باشد.

اگر از دقت تراش چرخ دنده اطمینان وجود دارد باید استفاده از حفشی محور چرخ دنده را حذف نمود چون

مکن است در چرخ اتصال قدرت زیاد تماس در سمت Flank برقرار شده باشد.

۲- چعبه دنده های کار کرده این نوع چعبه دنده ها در حالت زمانی به دلیل هیچ یک از مشکلات ذکر کرده اند تداخل

بصورت کم شدن روغن چعبه دنده خود را نشان می دهد.

21. Undercut

نیاز به بنابر ^{نصب} خط چرخ دنده در داخل جبهه دند، تماس در سمت Flank برقرار شدی توان

سطح دنده را بر این دایره Base دایره root تراش داد بطوری که تماس از بین می رود این عمل را

undercut می گویند. باعث تضعیف استحکام هستی دند می گردد

22. Contact Ratio

بنا بر تعریف نسبت تماس عبارت است از تعداد دندانه درگیرین در چرخ دندانی درگیر

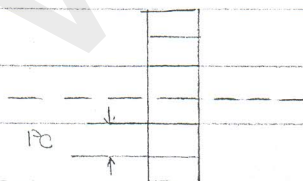
$$GR = \frac{\text{Angle of action}}{\text{Pitch angle}} = \frac{P}{P_c \cos \mu}$$

نسبت درامتنا

23. path of contact = CDH

عبارت است از بخشی از خط عمل دندانه هندی وقتی نقاط تماس بین دو چرخ دندانی بر این قسمت

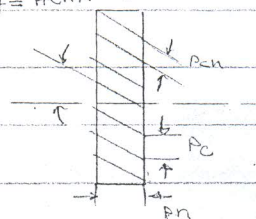
نقطی از خط عمل دندانه در Addendum چرخ دندانی درگیر است.



Spure

$$P_c \cdot P_d = \pi$$

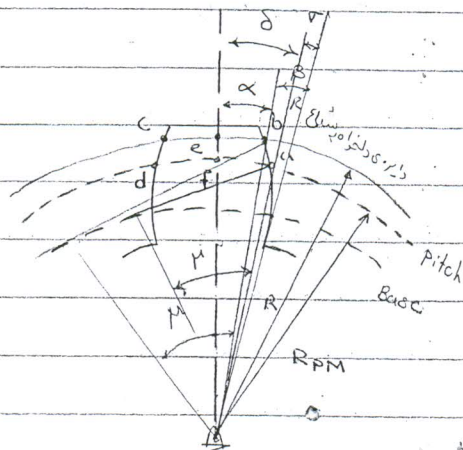
$\phi = \text{Helix angle}$



Helical gear

$$P_{cN} = P_d N = \pi$$

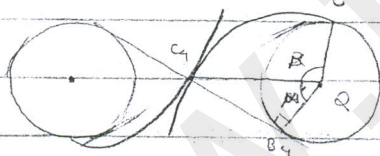
کامپی صفاست دینار در سطح و افواه R :



$$\alpha = \hat{e}mb = \frac{t_{bc}}{2R}$$

$$\delta = \hat{f}Ma = \frac{t_{ad}}{2R_{pm}}$$

حال از تعریف یعنی involute استفاده می‌کنیم



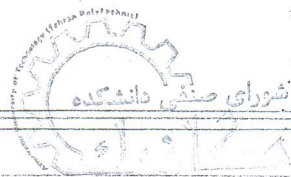
$$\beta = \text{Inv} \mu'$$

$$\beta = \text{Inv} \mu' = \tan \mu' - \mu'$$

$$\gamma = \text{Inv} \mu = \tan \mu - \mu$$

حال از روی شکل داریم:

$$\alpha + \beta = \delta + \gamma \Rightarrow \frac{t_{bc}}{2R} + \text{Inv} \mu' = \frac{t_{ad}}{2R_{pm}} + \text{Inv} \mu$$



$$t_{bc} = 2R \left(\frac{t_{ad}}{2R\mu} + \text{Inv} \mu - \text{Inv} \mu' \right)$$

ضامیت دندان در ستار R

Part II محاسبه نسبت تماس

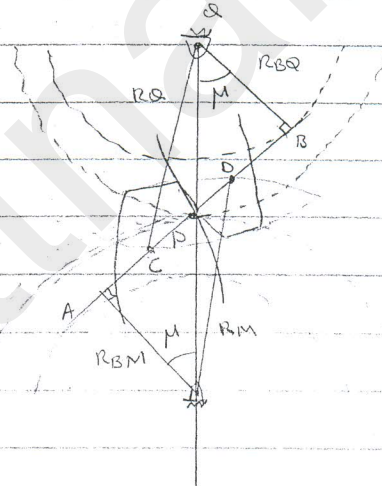
$$CIR = \frac{\text{Angle of action}}{\text{pitch angle}}$$

بنابراین نسبت تماس برابر است با:

$$C = \frac{CD}{P_c \cos \mu}$$

$$CD = CP + PD$$

$$CP = BC - BP$$



از روش مثلث قائم

$$BC^2 = R_Q^2 - R_{BQ}^2$$

$$BP = R_{PQ} \sin \mu$$

$$PD = AD - AP$$

$$AD^2 = R_M^2 - R_{BM}^2$$

$$AP = R_{PM} \sin \mu$$

$$\text{Path of Contact} = CD = (BC - BP) + (AD - AP)$$

$$CD = \sqrt{R_Q^2 - R_{BQ}^2} + \sqrt{R_M^2 - R_{BM}^2} - (R_{PQ} + R_{PM}) \sin \mu$$

$$CR = \frac{\sqrt{R_Q^2 - R_{BQ}^2} + \sqrt{R_M^2 - R_{BM}^2} - (R_{PQ} + R_{PM}) \sin \mu}{P_c \cos \mu}$$

با استفاده از استاندارد R_Q و R_M بدست می آید به عنوان مثال برای چرخ دنده 20°

$$R_M = R_{PM} + \frac{1}{P_D} \quad \text{Full Depth دایره Pitch}$$

$$R_Q = R_{PQ} + \frac{1}{P_D}$$

objective 3:

تعیین شیاره تداخل

قبل از ساخت یک چرخ دنده در نیروی توان چرخ دنده را باید در چرخ دنده به از ساخت تداخل خواهند

N_1 دایره دایره آخر اطلاعات مورد نیاز عبارتند از:

N_2

μ

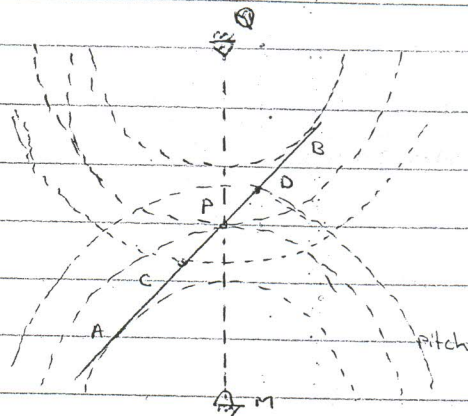
$$P_D = \frac{N}{D}$$

$$P_D = \frac{N_1}{D_1} = \frac{N_2}{D_2} \quad \text{بر اساس تساوی نیروی}$$

$$2 \times R_{PM} = D_1 = \frac{N_1}{P_D} \quad D_2 = \frac{N_2}{P_D} = R_{PQ} \times 2 \quad \text{و}$$

$$C = R_{PM} + R_{PQ} = M_Q \quad \text{فاصله بین دو مرکز}$$

$$R_{BQ} = R_{PQ} \cos \mu \quad R_{BM} = R_{PM} \cos \mu \quad \text{شعاع دایره Base}$$



بارسم رویر Base ریسایهای بن هاء خط عمل AB رسم می شود.

$$R_M = R_{PM} + \frac{1}{P_D}$$

بارسم شلخ رویر Addendum

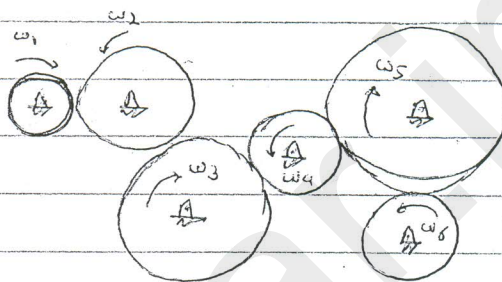
$$R_Q = R_{PQ} + \frac{1}{P_D}$$

یو قیعت path of contact (CD) بست می آید

اگر چنانچه نقاط C و D بین نقاط A و B قرار گیرند متداخل خواهیم داشت

Unit VII Design of Gear Train

1. Simple Gear Train



بنا بر ترتیب نسبت سرعت در حلقه دنده برابر است با:

$$SR = \frac{\omega_6}{\omega_1}$$

$$\frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

چون سرعت خطی بین چرخنده ها یکسان است لذا:

$$R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2 = \dots$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

لذا از روابط بالا داریم:

$$SR = \frac{R_5}{R_6} \times \frac{R_4}{R_5} \times \frac{R_3}{R_4} \times \frac{R_2}{R_3} \times \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow SR = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_6}$$

چون طبق قانون درگیر بین دو چرخ دنده باید Diametrical pitch یکسان باشند:

$$P_D = \frac{N}{D} = \frac{N}{2R} = \frac{N_1}{2R_1} = \frac{N_2}{2R_2} = \frac{N_3}{2R_3} = \dots = \frac{N_6}{2R_6}$$

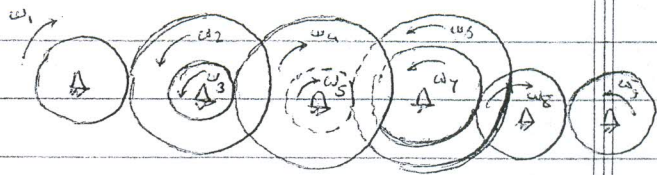
حال داریم:

$$\frac{R_1}{R_6} = \frac{N_1}{N_6}$$

از آنجا که

$$SR = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_6} = \frac{N_1}{N_6}$$

2. Compound Gear Train



بنابراین نسبت چرخ دنده برابر است با:

$$SR = \frac{\omega_6}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{\omega_8}{\omega_7} \cdot \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

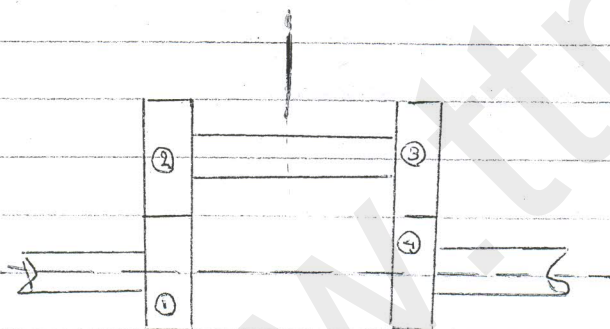
$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{\omega_9}{\omega_7} \cdot \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{R_7}{R_9} \cdot \frac{R_5}{R_6} \cdot \frac{R_3}{R_4} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

لذا حال داریم:

$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{\text{حاصلضرب شعاع دایره های چرخ دنده های Driver}}{\text{حاصلضرب شعاع دایره های چرخ دنده های Driven}}$$

3. Inverted compound Gear Train



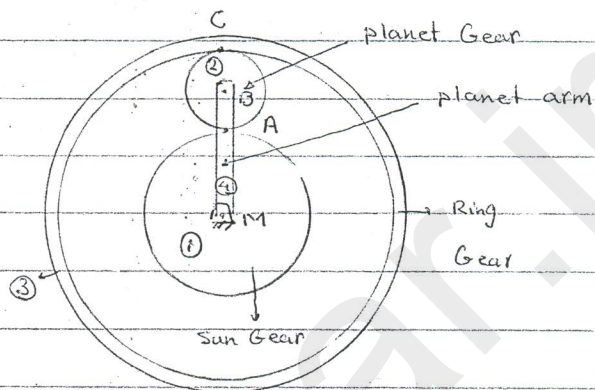
بنابراین تعریف نسبت سرعت ها برابر است با:

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{\omega_4 \omega_2}{\omega_3 \omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{R_3 R_1}{R_4 R_2}$$

4. Planetary Gear Train



$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \quad \text{از روی شکل روی Planet}$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B} \quad \text{از روی شکل روی Planet}$$

$$\vec{V}_{C/B} = -\vec{V}_{A/B} \quad * \text{ ۱۷}$$

$$\vec{V}_{C/B} = \vec{V}_C - \vec{V}_B \quad \text{نذاریم:}$$

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

$$\vec{V}_C - \vec{V}_B = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

$$V_C = R_3 \omega_3 \quad \text{روی Ring قدری:}$$

$$V_B = (R_1 + R_2) \omega_2 \quad \text{روی Planet arm}$$

$$V_A = R_1 \omega_1 \quad \text{Sun } \omega_1$$

$$R_3 \omega_3 - (R_1 + R_2) \omega_4 = -R_1 \omega_1 + (R_1 + R_2) \omega_4$$

$$\Rightarrow \boxed{R_1 \omega_1 + R_3 \omega_3 = 2(R_1 + R_2) \omega_4}$$

مسئله در نظر بگیرید:

1. Sun Gear is Fixed : $\omega_1 = 0$

input : planet arm

output : Ring

$$\boxed{SR = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{2(R_1 + R_2)}{R_3}}$$

2. Planet arm is Fixed : $\omega_4 = 0$

input : Sun

output : Ring

$$\boxed{SR = \frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_3}}$$

Reverse gear

3. Ring is Fixed : $\omega_3 = 0$

input : Sun

output : planet arm

$$SR = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)}$$

Unit VIII: Cams and Followers

دائری سیستم است:

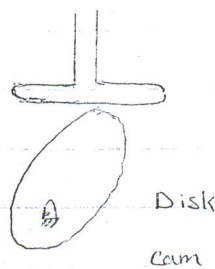
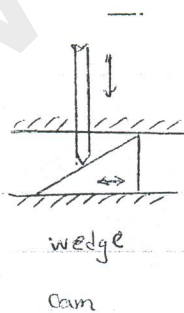
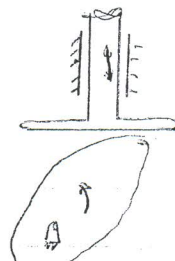
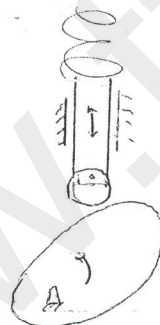
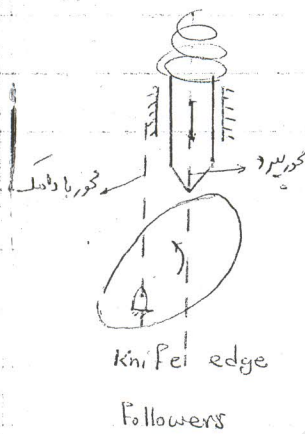
1. Cams

2. Followers

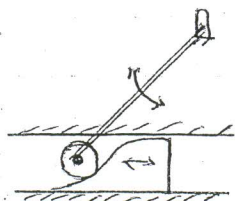
3. Motion programs

انواع پیرو (Followers):

اگر سرعت بالا باشد پیروی Jam اتفاق می افتد و بازگشت از آن آسان نیست



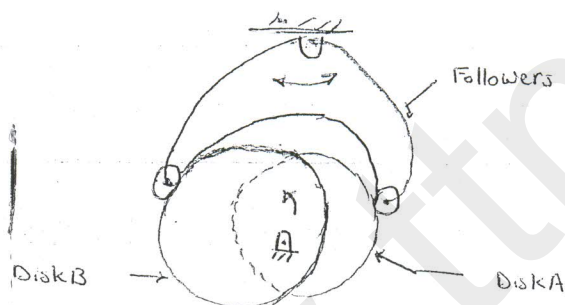
انواع بازگشت:



wedge

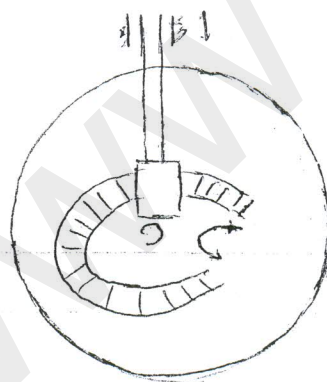
cam with oscillating followers

اگر سرعت دورانی بار یک سیبباز زیاد باشد از این نوع جادامک استفاده می شود.



Conjugate

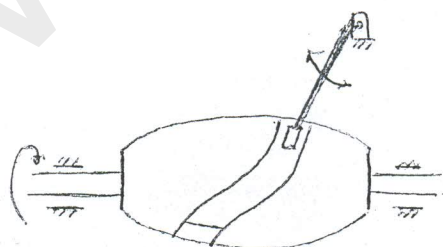
Cam



Spiral Cam

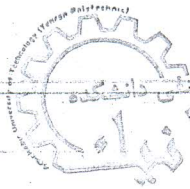
with translating

Followers



globoidal

Cam



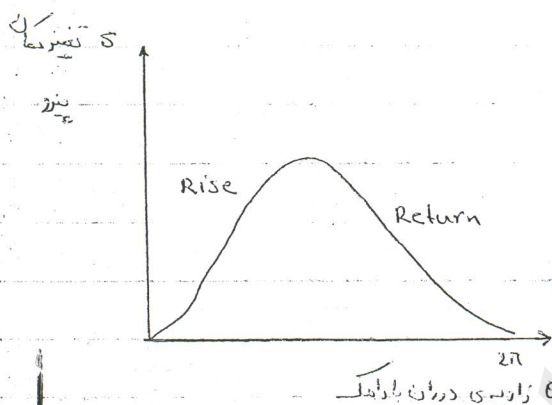
شهرای دانش فنی

دانشگاه

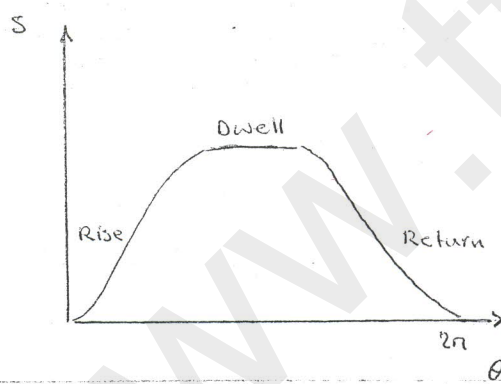
Motion program

انواع

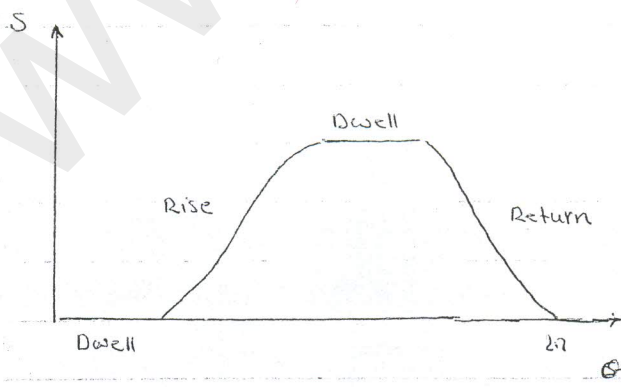
برنامه ای که باید بارش حرکت را پیرو منتقل کند



R-R Motion program



R-D-R Motion program



D-R-D-R Motion program

Objective 3:

نوساخت کانتور بارامک بارامک Motion programme رسم و رسم

فرض کنید سیستم بارامک رسم و رسم است. بارامک Motion م می توان کانتور بارامک رسم و رسم را

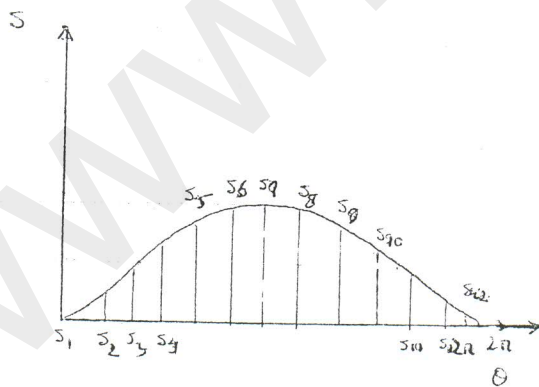
در بارامک رسم و رسم

مثال:

فرض کنید بارامک از نوع دیسک رسم و رسم و Translating و Roller Followen و هم مرکز بارامک

بارامک می باشد.

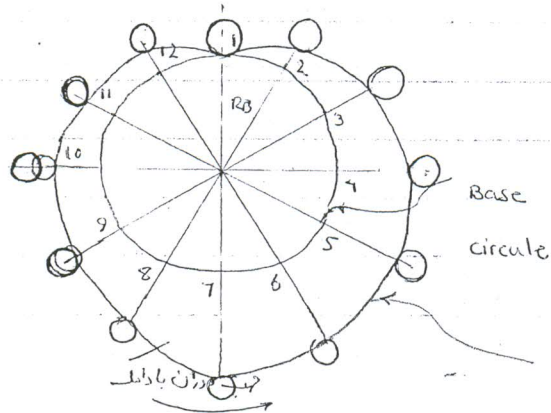
Motion programme مطابق شکل زیر رسم و رسم است.



1. ابتدا رسم و رسم Base بارامک را تعیین می کنیم و سطح آن را R_B می نامیم.

2. Motion programme را به تعداد تقسیمات مساوی تقسیم می کنیم (12 قسمت) و ارتفاع هر قسمت را

10 S_i می نامیم



۳- رابره ی Base رابره همان تعداد تقسیم می کنیم و در خطات حرکت حرکت بارامک شماره گذاری می کنیم.

۴- بوقییت Roller برررر در ۱۲ قسمت روی رابره ی Base از لربل ریرمشخص نموده رابره ی برررر

$$r_i = R_B + S_i + r_f$$

مشخص می کنیم :

r_f برابر با شعاع بررر یعنی شعاع Roller آن است برای این مقصود رابره ی Min شعاع انتخاب M_p

را حساب نموده r_f را طوری انتخاب نمود که کوچکتر از Min شعاع انتخاب M_p باشد.

۵- پیش ۱۲ دایره Roller کانتور بارامک است.

Unit IX Motion Programs

آنکه تغییر مکان پیرو، θ زاویه در را با دامک داریم:

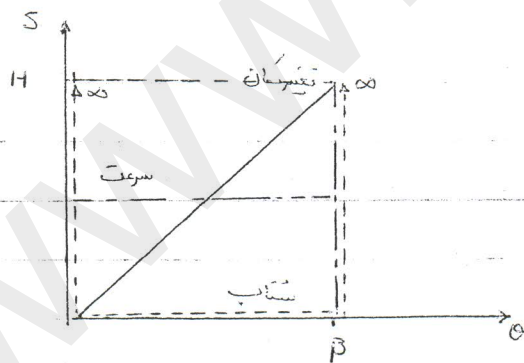
$$v = \frac{ds}{dt} = \text{سرعت پیرو}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{شتاب پیرو}$$

$$j = \frac{da}{dt} = \text{تکان (jerk)}$$

مفرقه Jerk، $\min$ کنیم آن سیستم Com Post. تری باشد

1- Constant velocity Motion programs



در این رابطه شتاب بی نهایت است.

$$S = c\theta \quad \text{معادله تغییر مکان}$$

$$\theta = \beta$$

$$S = H$$

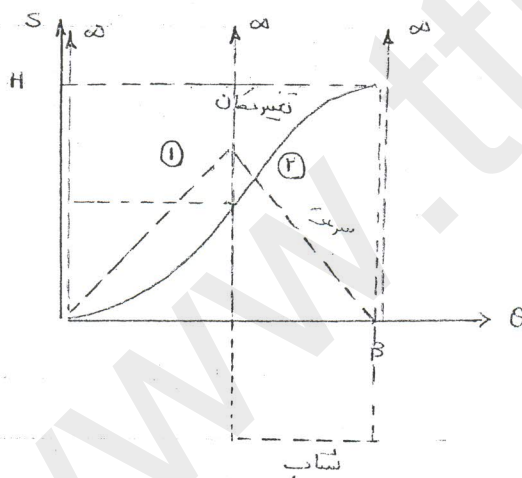
$$\Rightarrow H = c\beta \Rightarrow c = \frac{H}{\beta} \Rightarrow \left[S = H \frac{\theta}{\beta} \right] \quad \text{تغییر مکان}$$

$$V = \frac{ds}{dt} = H \frac{\omega}{\beta} \quad \text{سرعت}$$

$$a = 0$$

این شیخ به علت این که در ابتدا و انتهای Rise سگب بی نهایت است با توجه به جرم پیردینری بی نهایت
پیردینری متسل شده که غیر قابل قبول است برای سرعت های بالا.

2. Constant acceleration Motion program.



در سه نقطه حرکتی بی نهایت داریم.

$$S = c\theta^2 \quad 0 \leq \theta \leq \beta/2$$

$$\theta = \beta/2$$

$$S = H/2$$

$$\Rightarrow \frac{H}{2} = c\beta^2 \Rightarrow c = \frac{2H}{2\beta^2} \Rightarrow S = \frac{2H}{2} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2$$

$$V = \frac{4H}{\beta^2} \omega \theta \quad \text{سرعت}$$

$$a = \frac{4H}{\beta^2} \omega^2$$

$$S = C_1 \theta^2 + C_2 \theta + C_3 \quad \beta/2 \leq \theta \leq \beta$$

$$\theta = \beta$$

$$\theta = \beta$$

$$\theta = \beta/2$$

$$S = H$$

$$V = 0$$

$$V_2 = V_1$$

$$C_1 = \frac{-2H}{\beta^2}$$

$$C_2 = \frac{4H}{\beta}$$

$$C_3 = -H$$

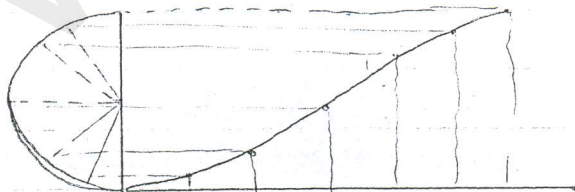
$$S = H \left[1 - 2 \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right]$$

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{4H\omega}{\beta} \left[1 - \frac{\theta}{\beta} \right]$$

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{-4H\omega^2}{\beta^2}$$

این سیستم نیز برای شتاب‌های کم قابل استفاده است.

3. Simple Harmonic Motion program.



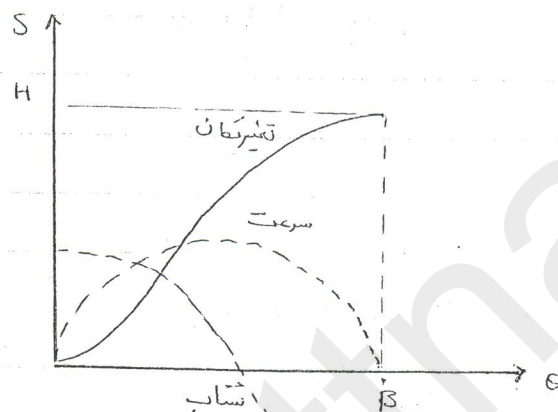
معادله حرکتی هارمونیک ساده

$$S = C(1 - \cos \varphi)$$

$$\varphi = \frac{\pi \theta}{\beta} \quad C = \frac{H}{2}$$

برای حرکت بادامک بر سر

$$S = \frac{H}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi \theta}{\beta} \right) \quad \text{تغییر مکان}$$



$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{H\pi\omega}{2\beta} \sin \frac{\pi\theta}{\beta}$$

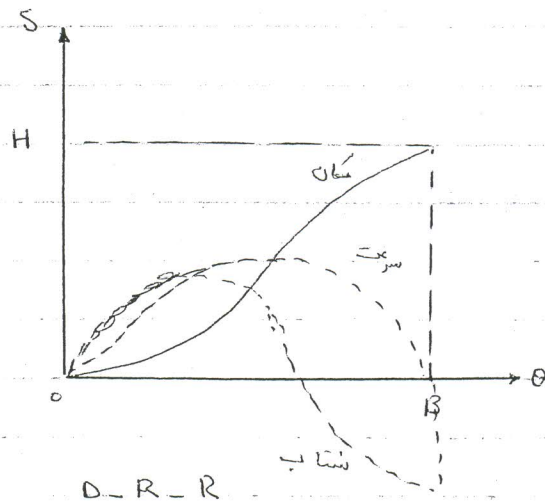
$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{H}{2} \left(\frac{\pi\omega}{\beta} \right)^2 \cos \frac{\pi\theta}{\beta}$$

4. Modified harmonic motion programs.

$$S = \frac{H}{2} \left[\left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right) - \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right) \right]$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{H\pi\omega}{2\beta} \left(\sin \frac{\pi\theta}{\beta} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$$

$$a = \frac{H}{2} \left(\frac{\pi\omega}{\beta} \right)^2 \left(\cos \frac{\pi\theta}{\beta} - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$$



در این جاذبه سرعت در شتاب ریزه حرکت می کند

5. polynomial Motion programs

شرایط مرزی:

$$\begin{aligned} \theta = 0 & \quad \theta = \beta & \quad \theta = \beta \\ S = 0 & \quad V = 0 & \quad A = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta = \beta & \quad \theta = \beta & \quad \theta = \beta \\ S = H & \quad V = 0 & \quad A = 0 \end{aligned}$$

$$S = D_0 + D_1 \theta + D_2 \theta^2 + D_3 \theta^3 + D_4 \theta^4 + D_5 \theta^5$$

$$V = D_1 \omega + 2D_2 \omega \theta + 3D_3 \omega^2 \theta + 4D_4 \omega^3 \theta + 5D_5 \omega^4 \theta$$

$$77 \quad a = \underline{D_1} + 2D_2 \omega^2 + 6D_3 \omega^2 \theta + 12D_4 \omega^3 \theta + 20D_5 \omega^4 \theta$$

Ko

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \\ S = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow D_0 = 1$$

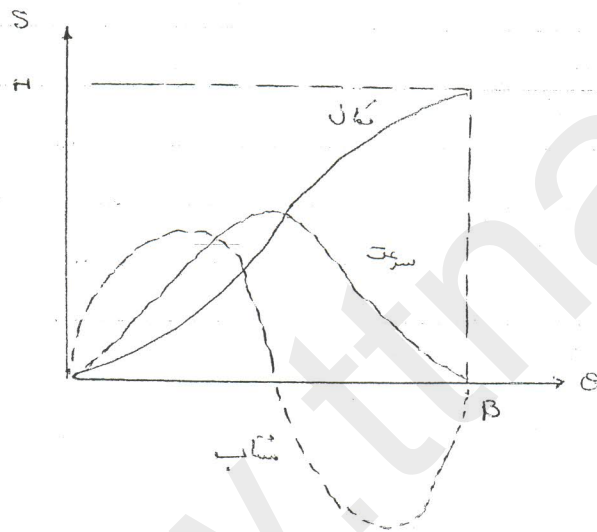
$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \\ V = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow D_1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta = \pi \\ \alpha = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow D_2 = 0$$

$$D_3 = \frac{10H}{\beta^3}$$

$$D_4 = -\frac{15H}{\beta^4}$$

$$D_5 = \frac{6H}{\beta^5}$$



Balancing of Rotating shafts

تعادل استاتیکی و دینامیکی در محورها:

تعادل استاتیکی حول محور ساکن از پاشی اتفاق می افتد. نیروهای دینامیکی از مرکز ثقل حاصل از خود را جثتی شده.

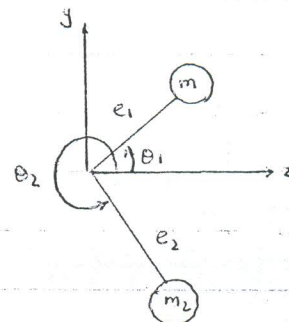
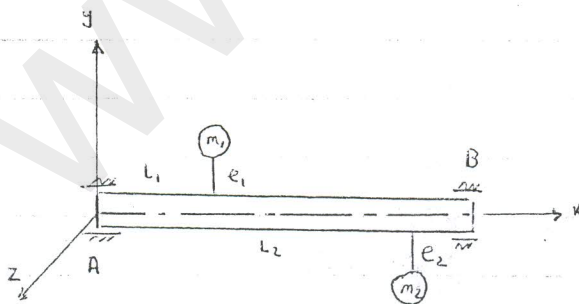
فرض کنید محور در AB روی دو پاشی A و B قرار دارد، دارای تعدادی جرم خارج از مرکز در فواصل مختلف

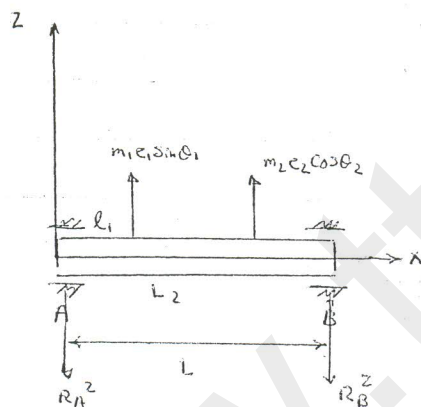
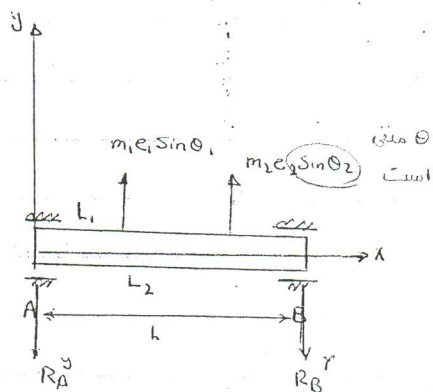
می باشد. به عنوان مثال فرض کنید محور دارای دو جرم خارج از مرکز $(m_1, e_1, l_1, \theta_1)$ و $(m_2, e_2, l_2, \theta_2)$

می باشد. در این دوران محور، عکس العمل نیروهای گریز از مرکز، جرم های خارج از مرکز روی پاشی A و B ایجاد می

جثتی نموده و در پاشی تعادل متغییر می یابد.

هدف: بالانس محور در این نوع روی پاشی A و B می باشد.





$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_A^y + m_1 e_1 \sin \theta_1 + m_2 e_2 \sin \theta_2 - R_B^y = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow m_1 e_1 \sin \theta_1 L_1 + m_2 e_2 \sin \theta_2 L_2 - R_B^y L = 0$$

از درون معادله بالا R_A^y و R_B^y را می‌توانیم بیابیم

در صفحه $x-z$:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -R_A^z + m_1 e_1 \cos \theta_1 + m_2 e_2 \cos \theta_2 - R_B^z = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -m_1 e_1 \cos \theta_1 L_1 - m_2 e_2 \cos \theta_2 L_2 + R_B^z L = 0$$

8c

از دو محادلی بقی هم R_A^Z و R_B^Z محاسب می شود

$$R_A = \sqrt{R_A^Y^2 + R_A^Z^2} = m_A e_A$$

$$\tan \theta_A = \frac{R_A^Y}{R_A^Z} \Rightarrow \theta_A = \tan^{-1} \frac{R_A^Y}{R_A^Z}$$

بنابراین: با اعمال جرم در محل یا تانگ A جرم و بازایی مناسب در شتاب مناسب تری هم

$$R_B = \sqrt{R_B^Y^2 + R_B^Z^2} = m_B e_B$$

$$\tan \theta_B = \frac{R_B^Y}{R_B^Z} \Rightarrow \theta_B = \tan^{-1} \frac{R_B^Y}{R_B^Z}$$