دینامیک گازها

استاد:

دکترسیف الله سعدالدین

تهیه کننده : مهرنوش سراج

مراجع :

- دینامیک گازها

تألیف: جیمزیی.ا.جان ترجمه:دکترعلی اکبرعالم رجبی

- دینامیک گازها تألیف: زاکرو

- دینامیک گازها تألیف: شاپیرو

عناوین مورد بحث:

- قوانین کلی حاکم بر گازها از نظر حجم کنترل
- معادله حالت گاز کامل و جریان آیزنتروپیک از مجاری با سطح مقطع متغیر
- جریان مافوق صوت همراه موج ضربه ای
- جریان تراکم پذیر همراه با اصطکاک
- جریان تراکم پذیر همراه با انتقال حرارت

فهرست مطالب

فصل اول: معادلات اصلی جریان تراکم پذیر

تعریف سیال: سیال ماده ای است پیوسته، که تغییر شکل پیوسته دارد.

جریان سیال :

1- تراکم ناپذیر (چگالی ثابت)

2- تراکم پذیر (چگالی تابع پارامترهایی مثل دما و فشار است)

محیطهایی که در مکانیک با آنها سر و کار داریم عبارتند از :

- محیطهای پیوسته
- محیطهای نا پیوسته

محیط پیوسته:محیطی که فاصله بین مولکولهای موجود در آن از مرتبه پویش آزاد مولکولهای سیال است.

محیط ناپیوسته(محیط رقیق):محیطی که فاصله بین مولکولها خیلی بیشتر از فاصله پویش آزاد است.

ما همواره با محیطهای پیوسته سرو کار داریم. در محیط رقیق باید تک تک اعضا را بشناسیم و توابع رندوم را برای ذرات تعریف کنیم.

در جریان سیالات تراکم پذیر از روی سطح جامد همانند جریان سیالات تراکم ناپذیریک لایه مرزی ایجاد میشود،که به دلیل کوچکی قابل صرفنظر کردن است.

جریان سیالات تراکم پذیر:

- یک بعدی
- دو بعدی
- سه بعدی

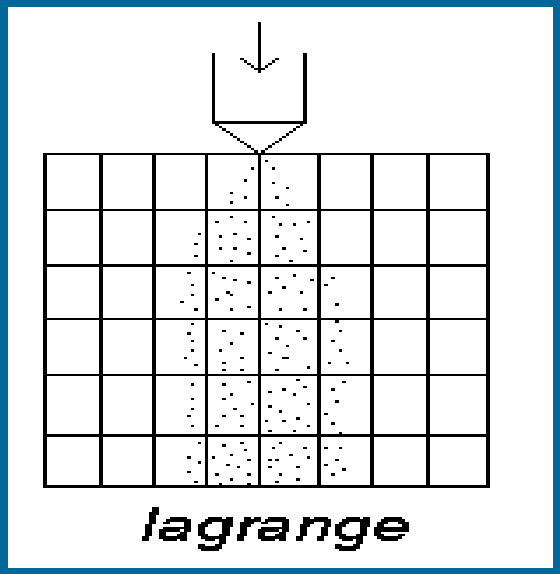
عموما در مباحث دینامیک گازها با جریان سیال یک بعدی سرو کار داریم. حالات دیگر پیچیده است.

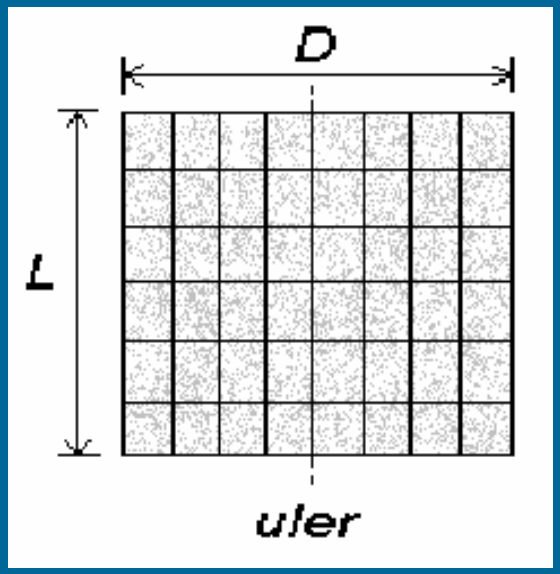
در بررسی دینامیک گازها دو دیدگاه قابل طرح است :

دیدگاه لاگرانژین: در آن مختصات بر روی خود ذرات استوار بوده و همراه با آن حرکت میکند .

دیدگاه اویلرین: مختصات و در نتیجه حجم معیار ثابت بوده و ذرات سیال از آن عبور میکنند و تغییرات آنها مورد بررسی قرار میگیرد.

وقتی سیال دو فازی باشد دو دیدگاه را با هم استفاده میکنیم.





معادلات انتگرالی تغییرات خواص سیال در حالت کلی برای روش حجم کنترل (از دیدگاه اویلرین)

خاصیت X را در داخل حجم کنترل با تغییرات زمانی و مکانی در نظر میگیریم:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)\Big|_{s.p.} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\Big|_{cv} + \iint_{s} x\,\rho\,\vec{v}\cdot d\vec{A} \qquad x = \frac{X}{M}$$

s.p. = system particles

M=total mass

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)\Big|_{s.p.} = \frac{d}{dt}\iiint_{cv} x\,\rho\,dV + \iint_{s} x\,\rho\,\vec{v}\cdot d\vec{A} \qquad (1)$$

معادله 1 کلیترین فرم تغییرات خاصیت X بر روی کل حجم کنترل است

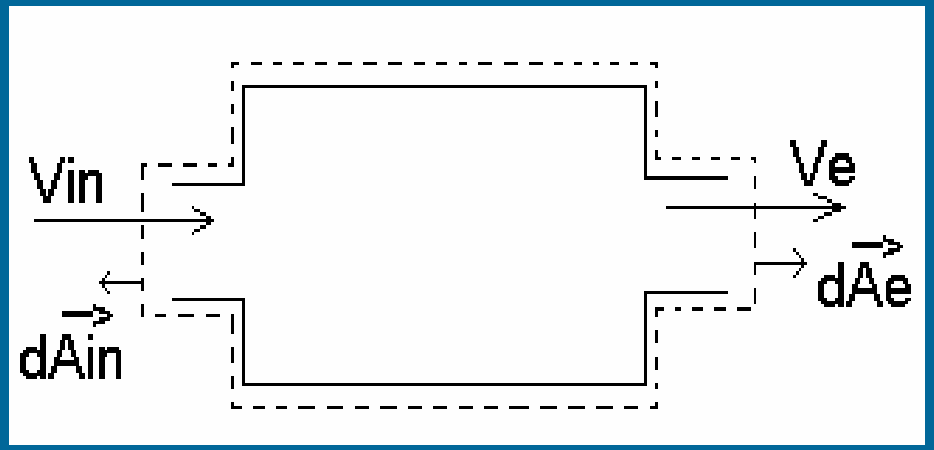
حالتهای ساده شده معادله 1 عبارتند از:

الف – حالتیکه X=M باشد

به این ترتیب معادله 1 معادله بقای جرم میشود و در این حجم کنترل حجم ثابت میماند و سمت چپ برابر صفر میشود .

حال اگر حجم کنترلی به صورت زیر در نظر بگیریم ، هر بردار سطح شامل دو مشخصه است :

- اندازه بردار سطح برابر اندازه مساحت است .
- بردار سطح به سمت بیرون و عمود بر سطح است .



مثال: 10 کیلوگرم بر ثانیه هوا وارد مخزنی به حجم 100متر مکعب میشود و 2کیلوگرم بر ثانیه از آن از مخزن خارج میشود. اگر هوای داخل مخزن ثابت باشد و بتوان آنرا گاز ایدآل فرض کرد ، نرخ افزایش فشار هوا را نسبت به زمان به دست آورید.

Mair= 28.97 Kg/Kmol

Rair=8.314/28.97=0.287 KJ/KgK

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{cv} \rho \, dV + \iint_{s} \rho \vec{v} . d\vec{A} \quad \text{--->} \quad \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{cv} \rho \, dV - 8 = 0$$

$$V\frac{\partial}{\partial t}\rho = 8 \quad \text{--->} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{8}{100}$$

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad \text{--->} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{RT}\frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{--->} \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 6.888 \ \text{KPa/S}$$

ب- معادله بقای مومنتوم (قانون دوم نیوتن)

$$\Sigma \vec{f} = M \frac{dV}{dt} \quad \xrightarrow{\vec{P} = M\vec{v}} \quad \Sigma \vec{f} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$X=\vec{P} \longrightarrow x = \frac{\vec{P}}{M} \quad \& \quad 1 \longrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{cv} \rho \vec{v}\, dV + \iint_{s} \vec{v}\cdot(\rho \vec{v}\cdot d\vec{A})$$

$$\text{steady flow} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{cv} \rho \vec{v}\, dV = 0 \longrightarrow \Sigma \vec{f} = \iint_{s} \vec{v}\cdot(\rho \vec{v}\cdot d\vec{A})$$

ج – معادله بقای انرژی

$$\delta Q - \delta W' = dE$$

$$X=E \ \& \ 1 \longrightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{cv} e\,\rho\, dV + \iint \rho\, e\, \vec{v}\, d\vec{A}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW'}{dt} \quad \& \quad e = u + gz + \frac{v^2}{2}$$

انرژی داخلی خود به چند حالت میتواند در یک المان از سیال ذخیره شود

1 – حالت الکتریکی

2 – حالت انتقالی ذرات

3 – حالت دورانی ذرات

4 - حالت ارتعاشی ذرات

د – قانون دوم ترمودینامیک

$$\text{reversible} \dashrightarrow \; ds = \frac{\delta Q}{T}$$

$$\text{irreversible} \dashrightarrow \; ds > \frac{\delta Q}{T}$$

معادله حالت گاز کامل

در این درس گازها کامل فرض شده اند پس معادله حالت گاز کامل برای آنها صدق میکند و ضمناً انرژی داخلی و نیز آنتالپی تنها تابعی از دما میباشند پس :

$$du = Cv \cdot dT$$

$$h = u + \frac{P}{\rho} = u + RT \quad \text{--->} \quad dh = du + d\left(\frac{P}{\rho}\right) = du + d(RT)$$

$$dh = du + RdT \quad \& \quad Cp = \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right) \quad \text{--->} \quad dh = Cp\, dT \quad \& \quad Cp - Cv = R$$

$$\text{if } Cp = Cte \quad \text{--->} \quad \begin{cases} h_2 - h_1 = \int dh = Cp\,(T_2 - T_1) \\ u_2 - u_1 = \int du + Cv\,(T_2 - T_1) \end{cases}$$

$$ds = Cp\frac{dT}{T} - \frac{dP}{TP/RT} \quad \text{--->} \quad ds = Cp\frac{dT}{T} - R\frac{dP}{P}$$

$$S_2 - S_1 = Cp\, Ln\left(\frac{T2}{T_1}\right) - R\, Ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$ds=0 \quad \text{--->} \quad Cp\,Ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)=R\,Ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

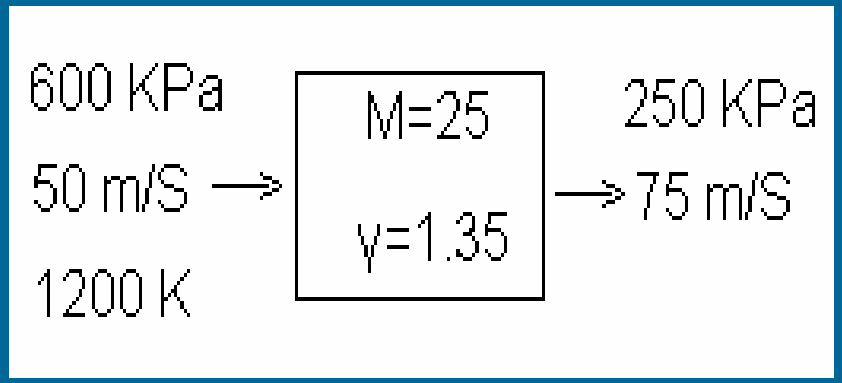
$$\frac{Cp}{R}=\frac{Cv}{R}+1=\frac{Cp}{\gamma R}+1 \text{--->} \frac{Cp}{R}=\frac{\gamma}{\gamma-1}$$

$$\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}=\frac{Cp}{R}\right]Ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)=Ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad \text{--->} \quad Ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)=Ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\text{--->} \quad \left(\frac{T_2}{T_1}\right)=\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

مساله 1 – 13 :

گاز داغ در فشار 600 KPa و دمای 1200 K با سرعت 50 m/S وارد توربین یک موتور جت میشود و در فشار 250 KPa با سرعت 75 m/S از آن خارج میشود، فرض کنید جریان پایدار و آیزنتروپیک است و گاز داغ مثل یک گاز کامل با گرمای ویژه ثابت (جرم مولکولی متوسط 25 و γ= 1.35) رفتار میکند. قدرت توربین را حساب کنید.



$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v} e\rho\, d\forall + \iint \left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)(\rho V.dA) = \dot{Q} - \dot{W}$$

$$\Rightarrow \dot{m}_e\left(h_e + \frac{V_e^2}{2}\right) - \dot{m}_i\left(h_i + \frac{V_i^2}{2}\right) + \dot{m}_2\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right) - \dot{m}_1\left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right) = \dot{Q} - \dot{W}$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{Q} = 0$$

$$\dot{m}_e = \dot{m}_i \qquad\qquad h = C_p T$$

$$\Rightarrow \dot{m}\left[C_p(T_e - T_i) + \frac{V_e^2 - V_i^2}{2}\right] = -\dot{W}$$

$$\Rightarrow -w = C_p(T_e - T_i) + \frac{V_e^2 - V_i^2}{2}$$

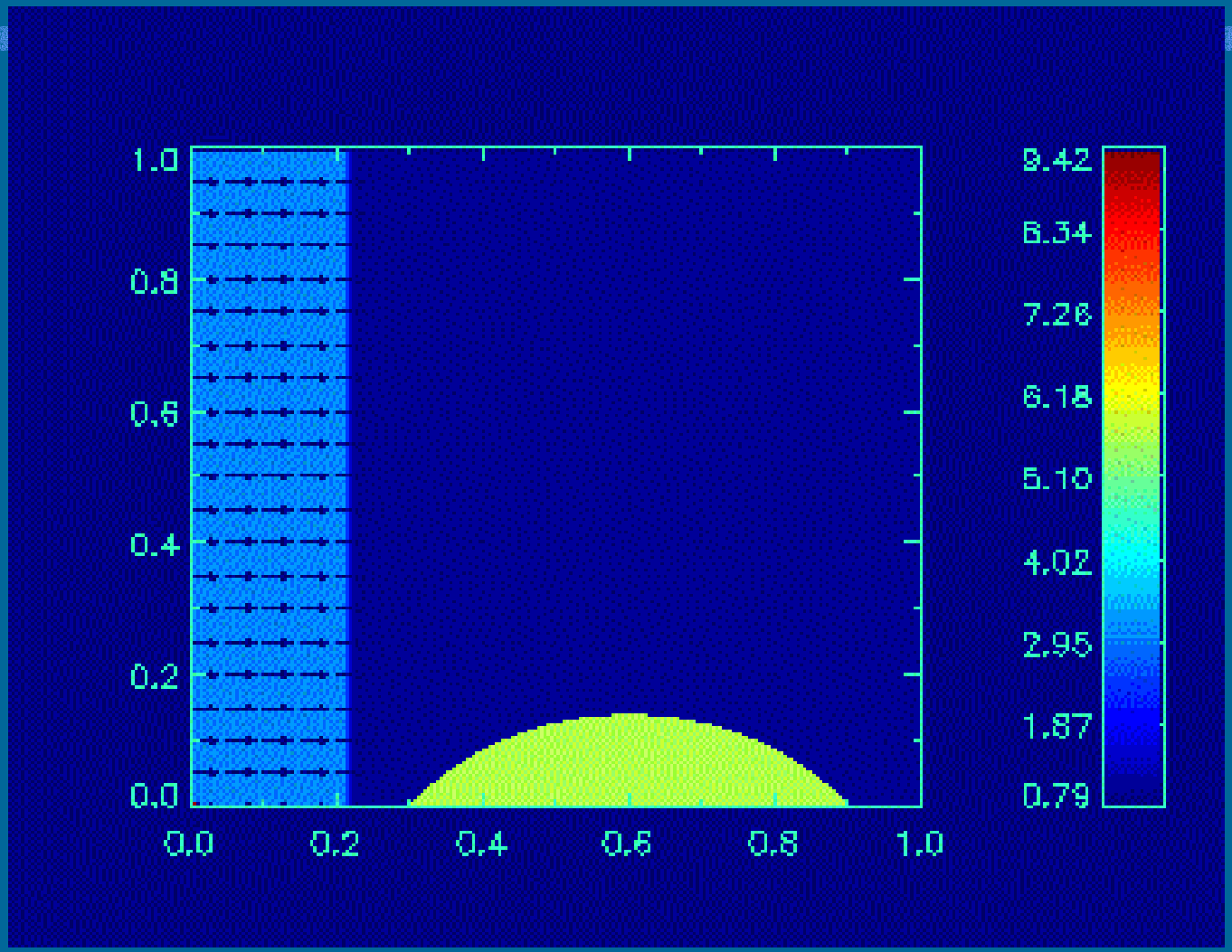
$$S = Cte \rightarrow \frac{T_e}{T_i} = \left(\frac{P_e}{P_i}\right)^{\frac{\wp - 1}{\wp}} \Rightarrow \frac{T_e}{1200} = \left(\frac{250}{600}\right)^{\frac{0.35}{1.35}} = 0.76 \Rightarrow T_e = 956.33\ K$$

$$\Rightarrow w = -C(956.33 - 1200) - \frac{75^2 - 50^2}{2} = 243.67\ C - 1562.5$$

$$\wp = 1.35 \qquad R = 0.287 \Rightarrow C_p = C = 1.107$$

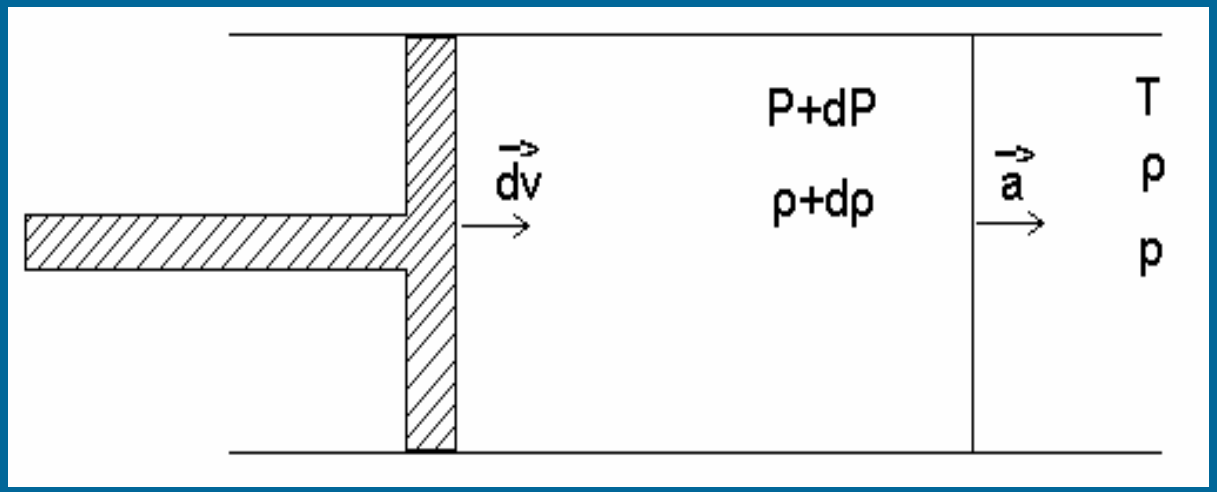
$$w = 1292.75$$

فصل دوم: انتشار موج در محیط تراکم پذیر

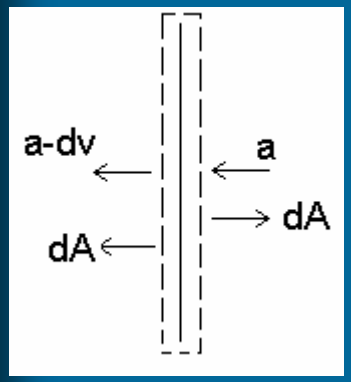


در این فصل میخواهیم سرعت اتفاق افتادن پدیده و سرعت خود سیال را نسبت به هم بررسی کنیم .

سرعت صوت :میخواهیم بدانیم سرعت صوت در یک محیط چگونه منتشر میشود و مقدار آنرا بدانیم ، حال سیلندر را در نظر بگیرید که در آن گاز ساکن است ، با یک حرکت پیستون گاز حرکت داده میشود و این سبب میشود که گاز ساکن که دارای فشار P و چگالی ρ بوده دارای فشار P+dP و چگالی ρ+dρ شود .



حجم کنترلی به صورت زیردر نظر میگیریم و قوانین بقای جرم و بقای مومنتوم را برای آن مینویسیم .



$$0=\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\, dv + \iint_S \rho\vec{v}\,.\,\vec{dA} \quad \text{--->} \quad \iint_S \rho\vec{v}\,.\,\vec{dA}=0 \qquad (1)$$

$$(\rho+d\rho)(a-dv)-\rho a=0 \quad \text{--->} \quad adp-\rho dv=0$$

$$\sum f=\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\, v\, dV + \iint_S v\cdot(\rho\vec{v}\,.\,\vec{dA}) \qquad (2)$$

$$PA-(P+dP)A=(a-dv)(\rho+d\rho)(a-dv).A-a\rho a.A$$

$$(a-dv)^2(\rho+d\rho)-\rho a^2=-dP \quad \text{--->} \quad (a^2+(dv)^2-2adv)(\rho+d\rho)-\rho a^2=-dP$$

$$a^2d\rho-2a\rho dv=-dP \quad \text{---->}$$

$$\text{continuity ---> } d\rho=a^2d\rho \quad \text{--->} \quad a=\sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$$

$$a=\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} \quad (3) \qquad \& \qquad s=Cte \text{-->} P=C_1\rho^{\gamma}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s=C_1\gamma\frac{P}{C_1\rho}=\frac{\gamma P}{\rho} \quad \text{--->} \quad a=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad \text{--->} \quad a=\sqrt{\gamma\cdot RT} \quad (4)$$

معادله 3 برای هر محیطی صادق است اما 4 فقط برای گاز ایدال برقرار است

الف : سرعت انتشار صوت در محیطهای مایع

برای مایعات یک ضریب تراکم پذیری تعریف شده و سرعت سیال با استفاده از آن بیان میشود

$$K_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s \quad \text{--->} \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s = K_s \rho \quad \text{--->} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s} = \frac{1}{K_s \rho}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} = \frac{1}{\sqrt{K_s \rho}} \qquad (1)$$

$$K_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \qquad \& \qquad \frac{K_T}{K_s} = \gamma$$

ب : سرعت صوت در جامدات

در جامدات سرعت صوت با استفاده از مدول بالک ایزنتروپیک بدست میاید .

$$\beta_s = \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s \dashrightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\beta_s}{\rho} = a^2 \dashrightarrow a = \sqrt{\frac{\beta_s}{\rho}}$$

سرعت سیال نسبت به سرعت صوت

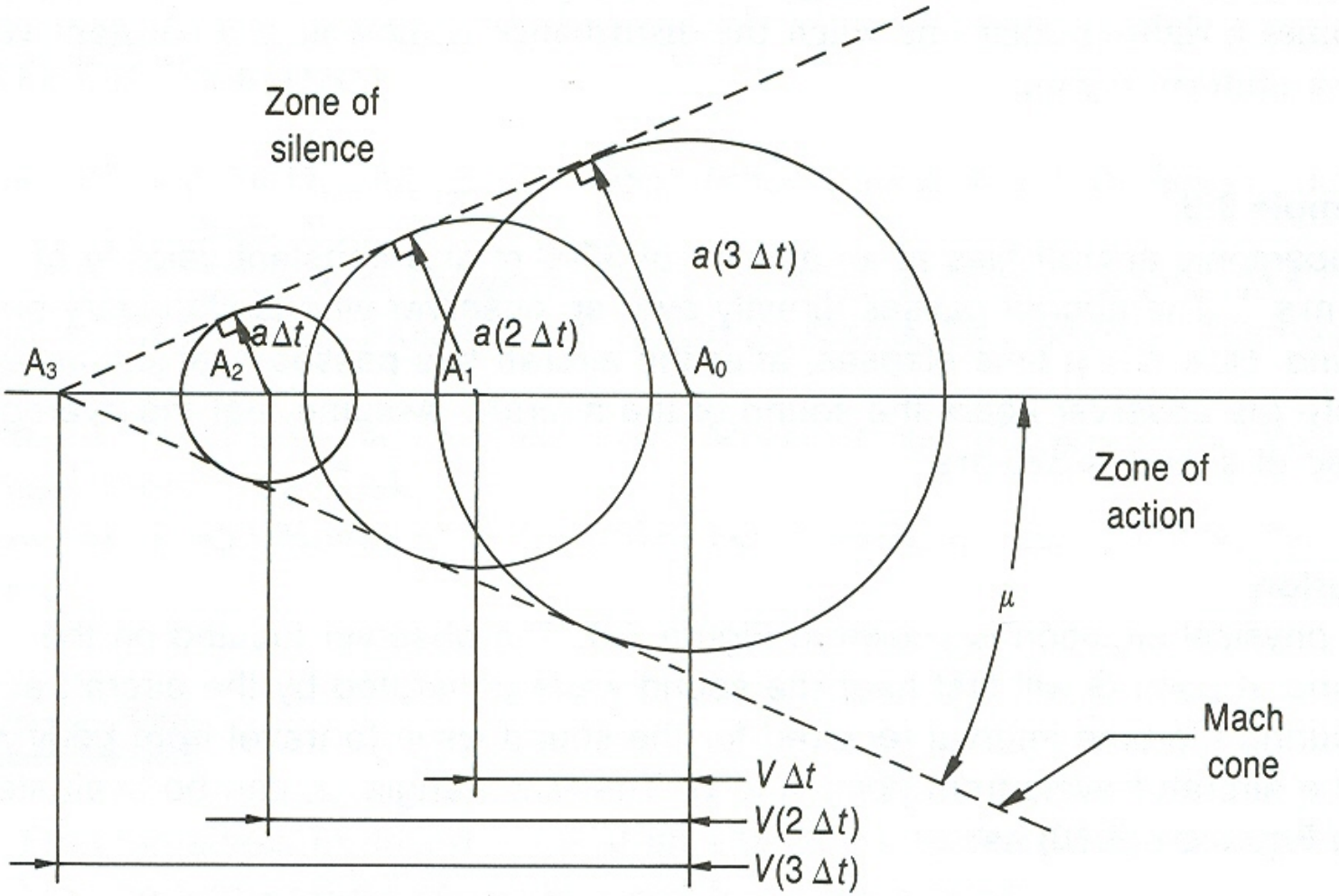
وقتی سیال دارای سرعت باشد نسبت به صوت حالات مختلفی را بوجود میاورد .
سرعت سیال را با v و سرعت صوت را با C نشان میدهیم و حالات زیر را خواهیم داشت:

الف : V=c در این حالت سیال دارای سرعتی برابر با سرعت صوت است (مثلا همراه با دیدن هواپیما صدای آنرا نیز میشنویم)

ب : V<c در این حالت سرعت سیال کمتر از سرعت صوت است ، یعنی سیال خبر وقوع حادثه را دریافت میکند و میتواند خود را با آن وفق دهد

پ : V>c در این حالت سرعت صوت کمتر از سرعت سیال است و قبل از آنکه سیال بتواند خودرا با حادثه تطبیق دهد ، حادثه رخ میدهد . اولین قسمتیکه از حادثه باخبرمیشود همان قسمتی است که حادثه در آن رخ میدهد . قسمتی از فضا که خبر را دریافت میکند مخروط ماخ نامیده میشود و خارج از آنرا ناحیه سکوت مینامند .

$$\sin\mu = \frac{a(3\ \Delta t)}{V(3\ \Delta t)} = \frac{a(2\ \Delta t)}{V(2\ \Delta t)} = \frac{a(\Delta t)}{V(\Delta t)} = \frac{a}{V} = \frac{1}{M} \tag{3.10}$$



ure 3.7 Pressure disturbances produced by a point source moving at supersonic ed

مساله 2-5 :

سرعت صوت در هوا را در 25C و 101KPa محاسبه کنید.

محاسبه را برای هوا در 25 C و 50 KPa و نیز در 25 C و 150 Kpa تکرار کنید .

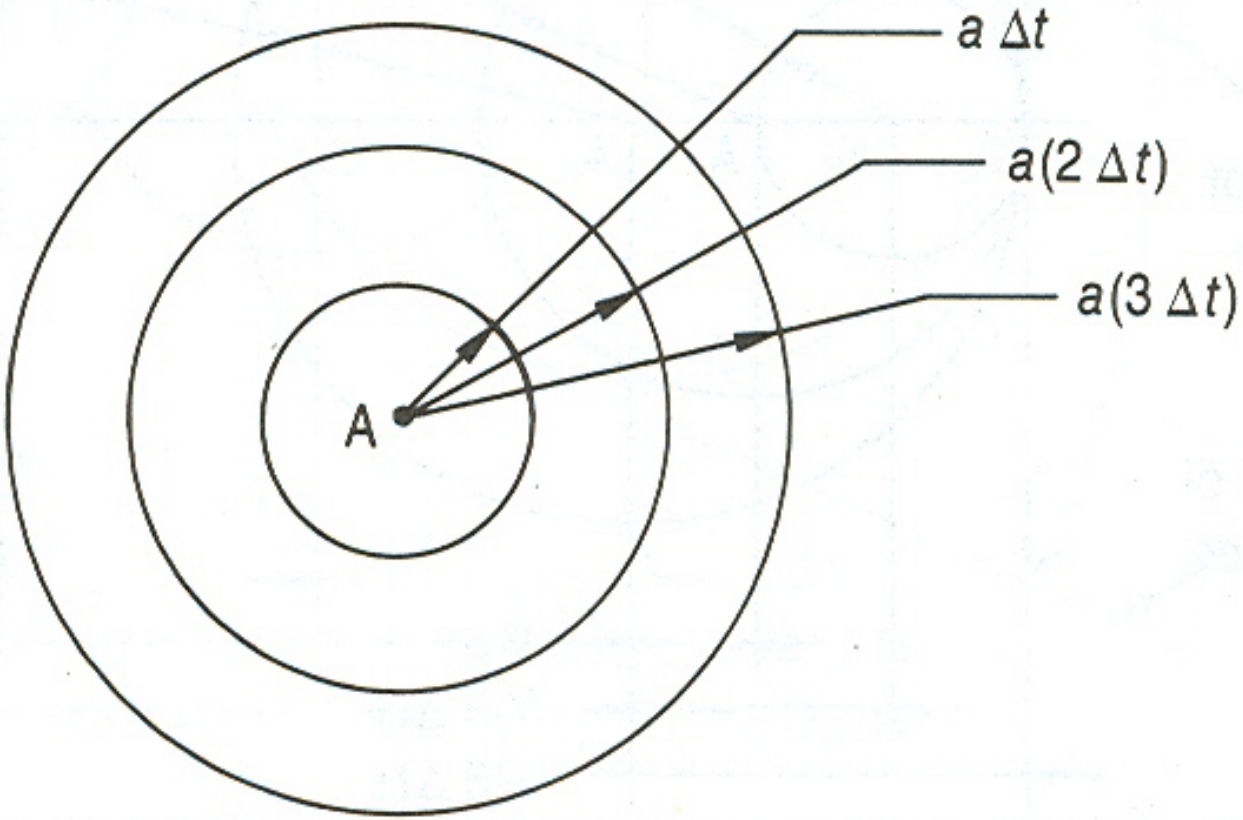
$$Air \rightarrow R = 0.287 KJ/Kg.K \qquad \wp = 1.4$$

$$\left.\begin{array}{l} T = 25^{\circ}C = 298K \\ P = 101KPa \end{array}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{\wp P}{\rho}} = \sqrt{\wp RT} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 298} = 346.03 m/S$$

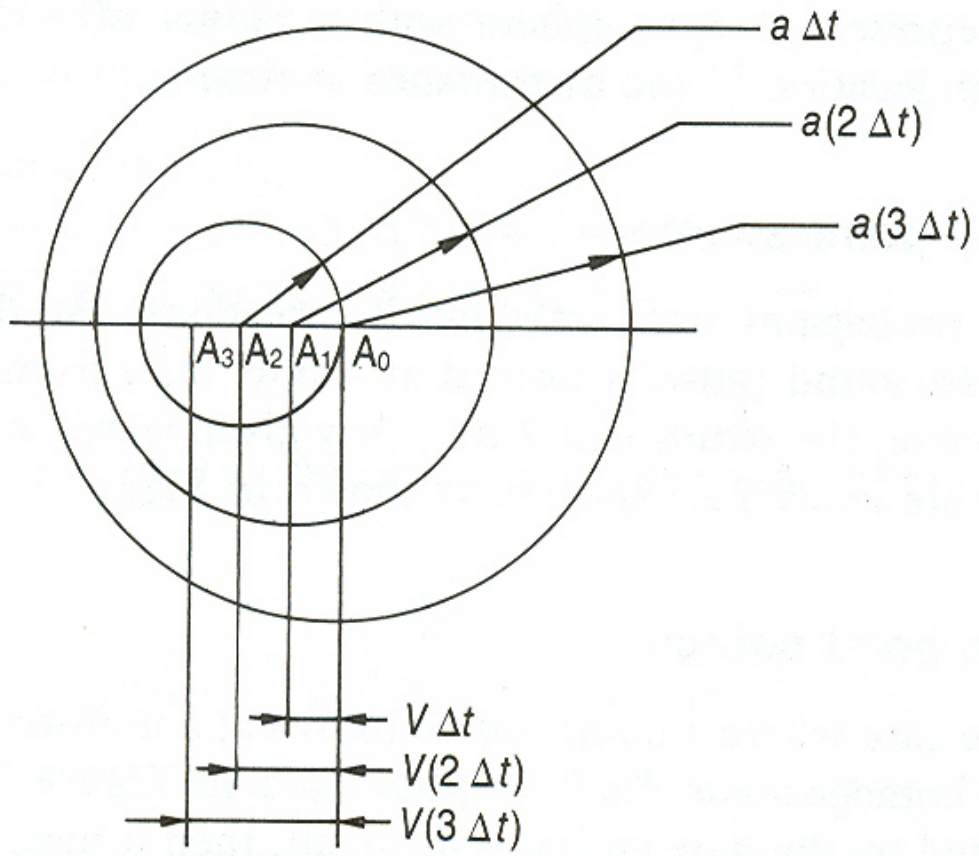
$$\Rightarrow \rho = 1.18 \times 10^{-3}$$

$$\left.\begin{array}{l} T = 25^{\circ}C \\ P = 50KPa \end{array}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{\wp P}{\rho}} = \sqrt{\frac{1.4 \times 50}{1.18 \times 10^{-3}}} = 243.56 m/S$$

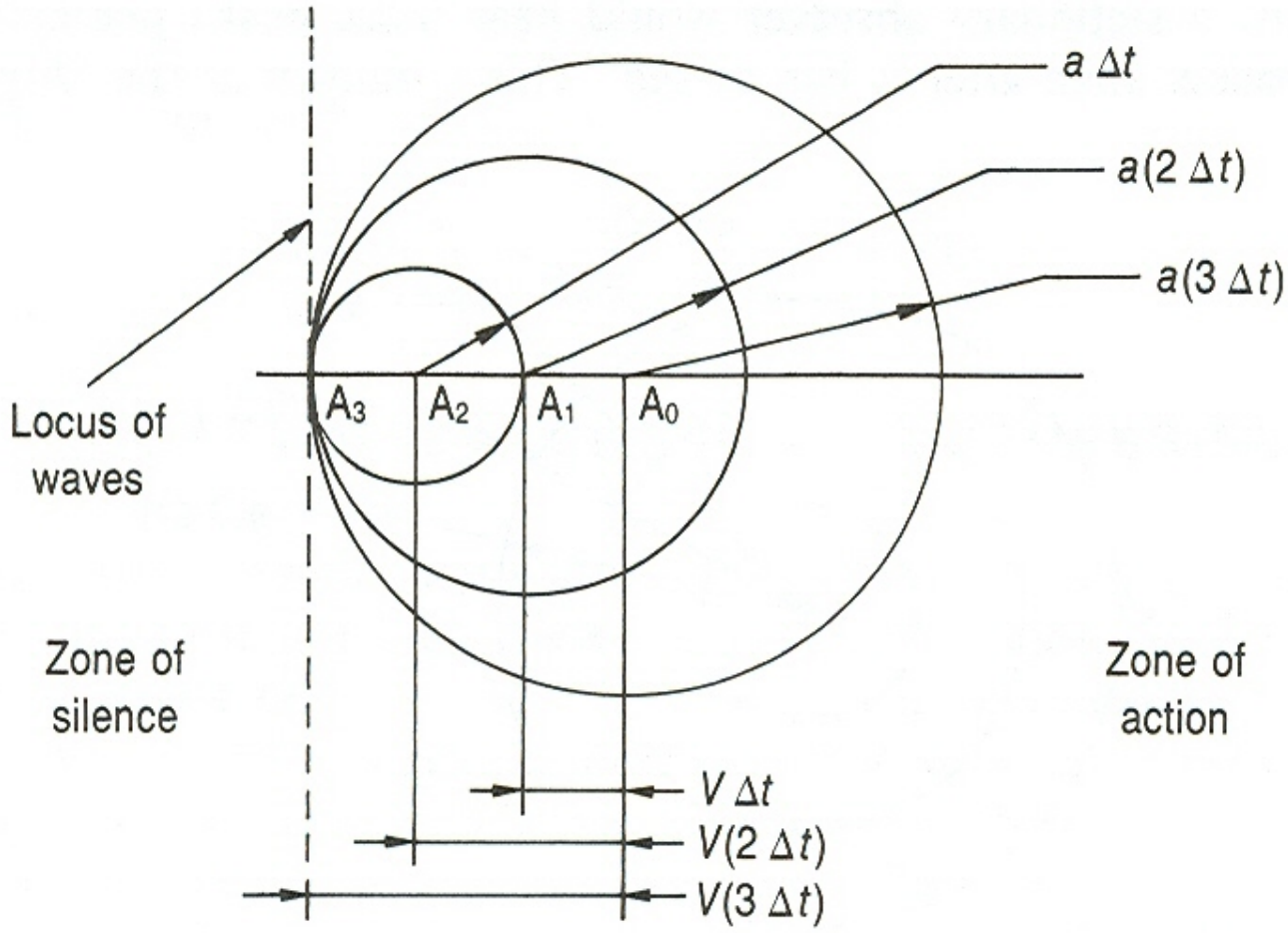
$$\left.\begin{array}{l} T = 25^{\circ}C \\ P = 150KPa \end{array}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1.4 \times 150}{1.18 \times 10^{-3}}} = 421.86 m/S$$



Propagation of sound waves from a stationary point source

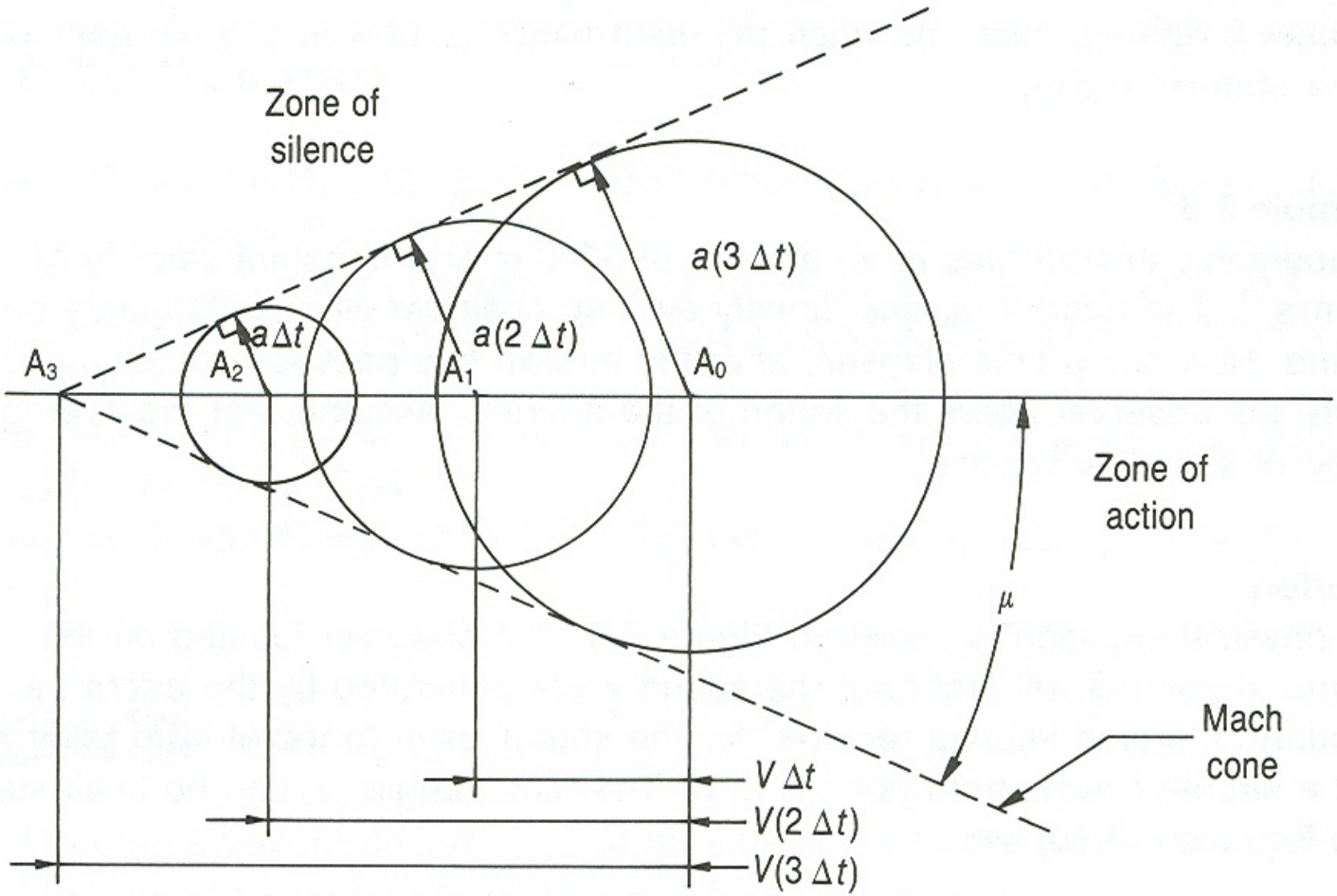


Pressure disturbances produced by a point source moving at subsonic



Pressure disturbances produced by a point source moving at sonic speed

$$\sin\mu = \frac{a(3\ \Delta t)}{V(3\ \Delta t)} = \frac{a(2\ \Delta t)}{V(2\ \Delta t)} = \frac{a(\Delta t)}{V(\Delta t)} = \frac{a}{V} = \frac{1}{M} \tag{3.10}$$



ure 3.7 Pressure disturbances produced by a point source moving at supersonic
ed

Example 3.3

A supersonic aircraft flies at an altitude of 3000 m at a constant velocity of 650 m s^{-1}. The aircraft passes directly over an observer who is stationary on the ground. How much time elapses, after the aircraft has passed over the observer, before the observer hears the sound of the aircraft? Assume that the average speed of sound is 325 m s^{-1}.

Solution

The physical situation is shown in Figure 3.9. The observer located on the ground at point G will first hear the sound wave generated by the aircraft at point A. During the time interval required for the sound wave to travel from point A to G, the aircraft travels from point A to B. The Mach angle, μ, can be evaluated from Equation (3.10) as

$$\mu = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{a}{V}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{325\ \text{m s}^{-1}}{650\ \text{m s}^{-1}}\right) = 30°$$

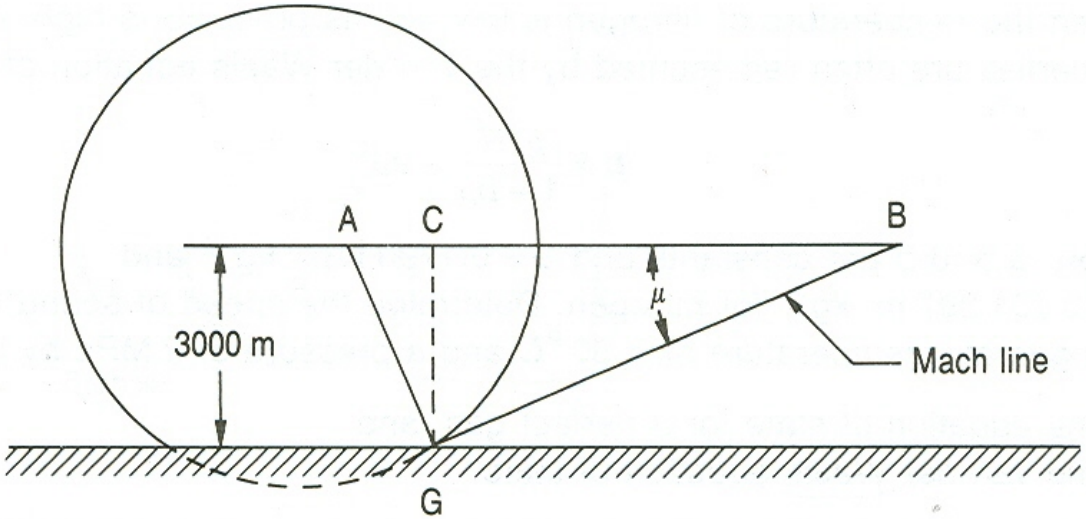


Figure 3.9 Sketch for Example 3.3

The distance from point C to point B is

$$\overline{CB} = \frac{\overline{GC}}{\tan \mu} = \frac{3000 \text{ m}}{\tan 30^\circ} = 5196 \text{ m}$$

The time required for the aircraft to travel from point C to point B is

$$t = \frac{\overline{CB}}{V} = \frac{5196 \text{ m}}{650 \text{ m s}^{-1}} = \mathbf{7.994 \text{ s}}$$

فصل سوم :جریان آیزنتروپیک گاز کامل

در جریان یک گاز چند اثر میتواند تاثیر گذار باشد :

اثر اول:تغییر سطح مقطع(کانالهای همگرا ، کانالهای واگرا ، کانالهای همگرا – واگرا)

اثر دوم:جریان گاز کامل همراه با اصطکاک

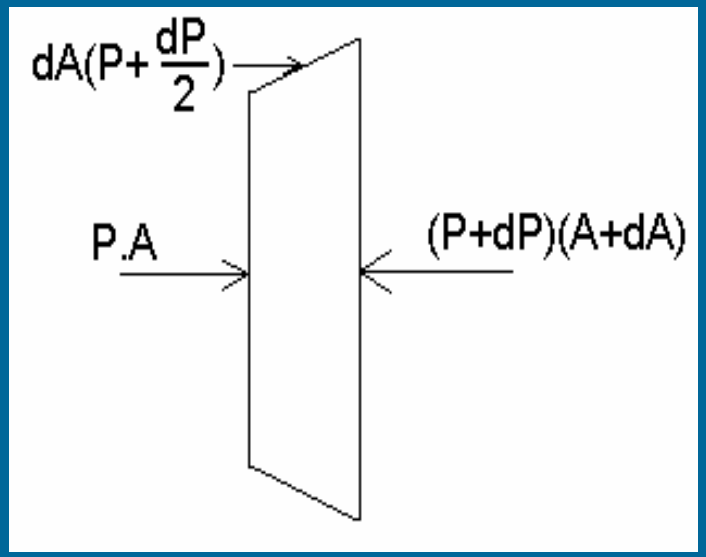
اثر سوم:جریان گاز کامل از داخل مجرایی که همراه با انتقال حرارت است

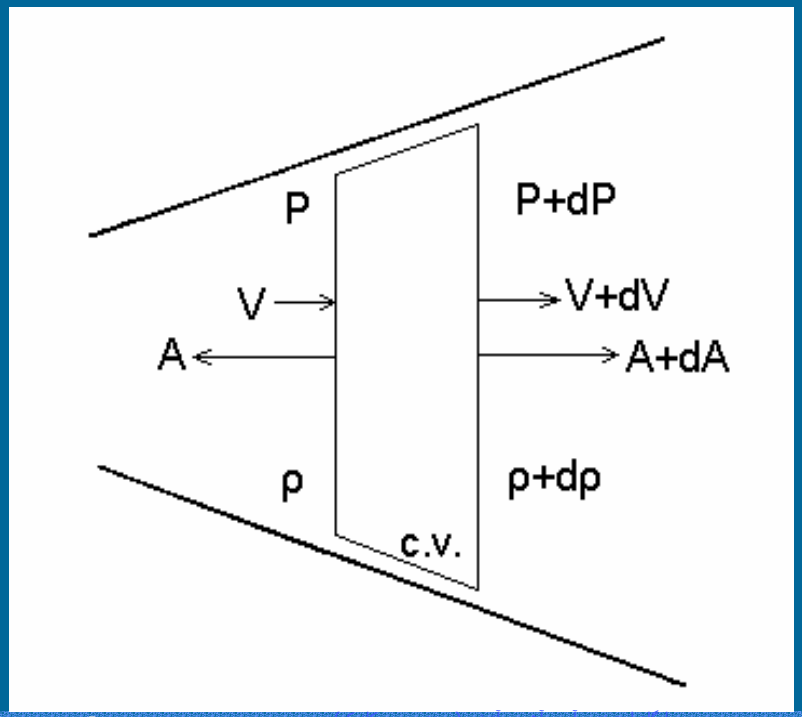
ما در دینامیک گازها اثر هرکدام از اینها را تک تک بررسی میکنیم و در نهایت فرض میکنیم اصل سوپر پوزیشن برقرار است .

تغییرات سطح مقطع:

در مبحث تغییرات سطح مقطع همواره فرض میشود که جریان آیزنتروپیک است .

یک المان به صورت زیر در نظر میگیریم و معادلات بقا را برای آن مینویسیم:





$$continuity: \iint_s \rho \vec{v}.d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\rho + d\rho)(A + dA)(v + dv) - \rho A v = 0$$

$$\rho v\, dA + \rho A\, dv + vA\, d\rho = 0 \quad \xrightarrow{*1/\rho A v} \quad \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$momentum: \sum \vec{f} = \iint_s \vec{v}(\rho \vec{v}.dA) \quad \Rightarrow$$

$$PA - (P + dP)(A + dA) + \left(P + \frac{dP}{2}\right).dA = \dot{m}dv = \rho A v.dv \quad \Rightarrow \quad dP + \rho v dv = 0$$

$$energy: \iint \left(h + \frac{v^2}{2}\right)(\rho \vec{v}.d\vec{A}) = 0 \Rightarrow dP + \rho v dv = 0$$

جریانهای مادون صوت و مافوق صوت در کانالهای با سطح مقطع متغیر:

$$dp+\rho v dv=0 \quad (1) \quad , \quad \frac{dv}{v}=-\frac{d\rho}{\rho}-\frac{dA}{A} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{v}\rho v^2+dp=0 \rightarrow do+\rho v^2(-\frac{d\rho}{\rho}-\frac{dA}{A})=0 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=a^2} \quad dp=a^2 d\rho \rightarrow d\rho=\frac{dp}{a^2} \quad (4)$$

$$dp+\rho v^2(-\frac{dp}{\rho a^2}-\frac{dA}{A})=0 \quad \rightarrow \quad dp(1-\frac{v^2}{a^2})=\rho v^2\frac{dA}{A}$$

$$\xrightarrow{M=\frac{v}{a}} \quad dp(1-M^2)=\rho v^2\frac{dA}{A} \quad *$$

حالا معادله ستاره را برای حالات زیر در نظر بگیرید

الف) جریان با M<1 وارد کانال همگرا شده، میخواهیم تغییرات سطح مقطع را روی سرعت و سایر پارامترها بررسی کنیم.

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(1-M^2)>0\\ \dfrac{dA}{A}<0\end{array}\right\}dp<0\\ \rho v dv=-dp\end{array}\right\}\rightarrow dv>0$$

ب) جریان با ماخ کوچکتر از یک وارد کانال واگرا میشود.

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}(1-M^2)>0\\ \dfrac{dA}{A}>0\end{array}\right]dp>0\\ \rho v dv=-dp\end{array}\right\}\rightarrow dv<0$$

ج) جریان با ماخ کوچکتر از یک را وارد کانال همگرا میکنیم.

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(1-M^2)<0\\ \dfrac{dA}{A}<0\end{array}\right\}dp>0\\ \rho v dv=-dp\end{array}\right\}\rightarrow dv<0$$

د) جریان با ماخ بزرگتر از یک وارد کانال واگرا شود.

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(1-M^2)<0\\ \dfrac{dA}{A}>0\end{array}\right\}dp<0\\ \rho v dv=-dp\end{array}\right\}\rightarrow dv>0$$

خواص سکون: خواص سیال وقتی سرعت آن صفر است.

آنتالپي سکون

$$h_t = h + \frac{v^2}{2}$$

دماي سکون

$$C_p(T_t - T) = h_t - h = \frac{v^2}{2} \Rightarrow T_t = T\left(1 + \frac{v^2}{2C_pT}\right)$$

$$\xrightarrow{C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}} T_t = T\left(1 + \frac{(\gamma - 1)v^2}{2\gamma RT}\right)$$

$$\xrightarrow{a^2 = \gamma RT} T_t = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right) \Rightarrow \frac{T_t}{T} = f(M)$$

فشار سکون

$$isentropic \rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{P_t}{P_1} = \left(\frac{T_t}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

نکته:اگر جریان سیال تراکم پذیری را داخل کانال برقرار کنیم، برای جریان آیزنتروپیک و آدیاباتیک، فشار سکون و دمای سکون میتواند با هر نقطه دیگر برابر باشد.

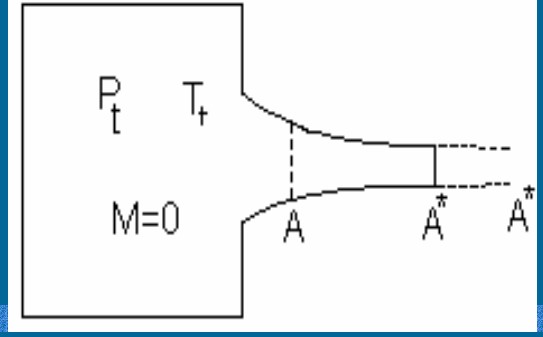
$$\begin{cases} \dot{m} = \rho A v \\ v = Ma \quad a = \sqrt{\gamma R T} \end{cases} \Rightarrow \dot{m} = \frac{P}{RT} A M \sqrt{\gamma R T}$$

$$isentropic \rightarrow P = \frac{P_t}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$$

$$adiabatic \rightarrow T = \frac{T_t}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \frac{P_t}{\sqrt{R T_t}} A \sqrt{\gamma} M \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(1 - \gamma)}}$$

$$= \frac{P_t A}{\sqrt{R T_t}} \sqrt{\gamma} M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(1 - \gamma)}}$$

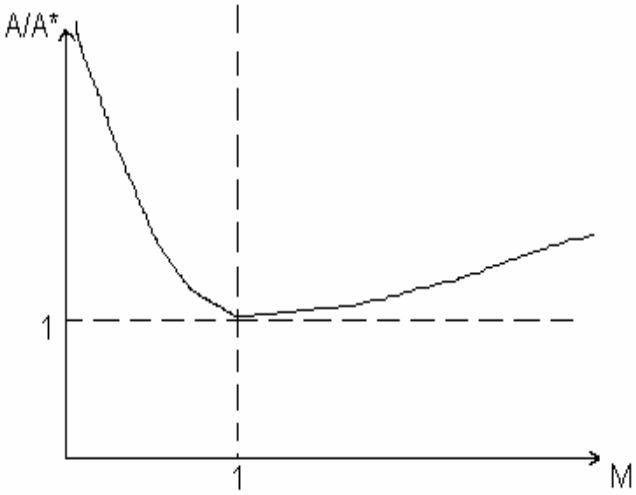


نقطه مرجع: نقطه ای است که عدد ماخ در آن یک است و با ستاره نشان داده میشود.

$$\frac{P_t A^*}{\sqrt{RT_t}} f(\wp) = \frac{P_t A}{\sqrt{RT_t}} f(\wp, M) \Rightarrow$$

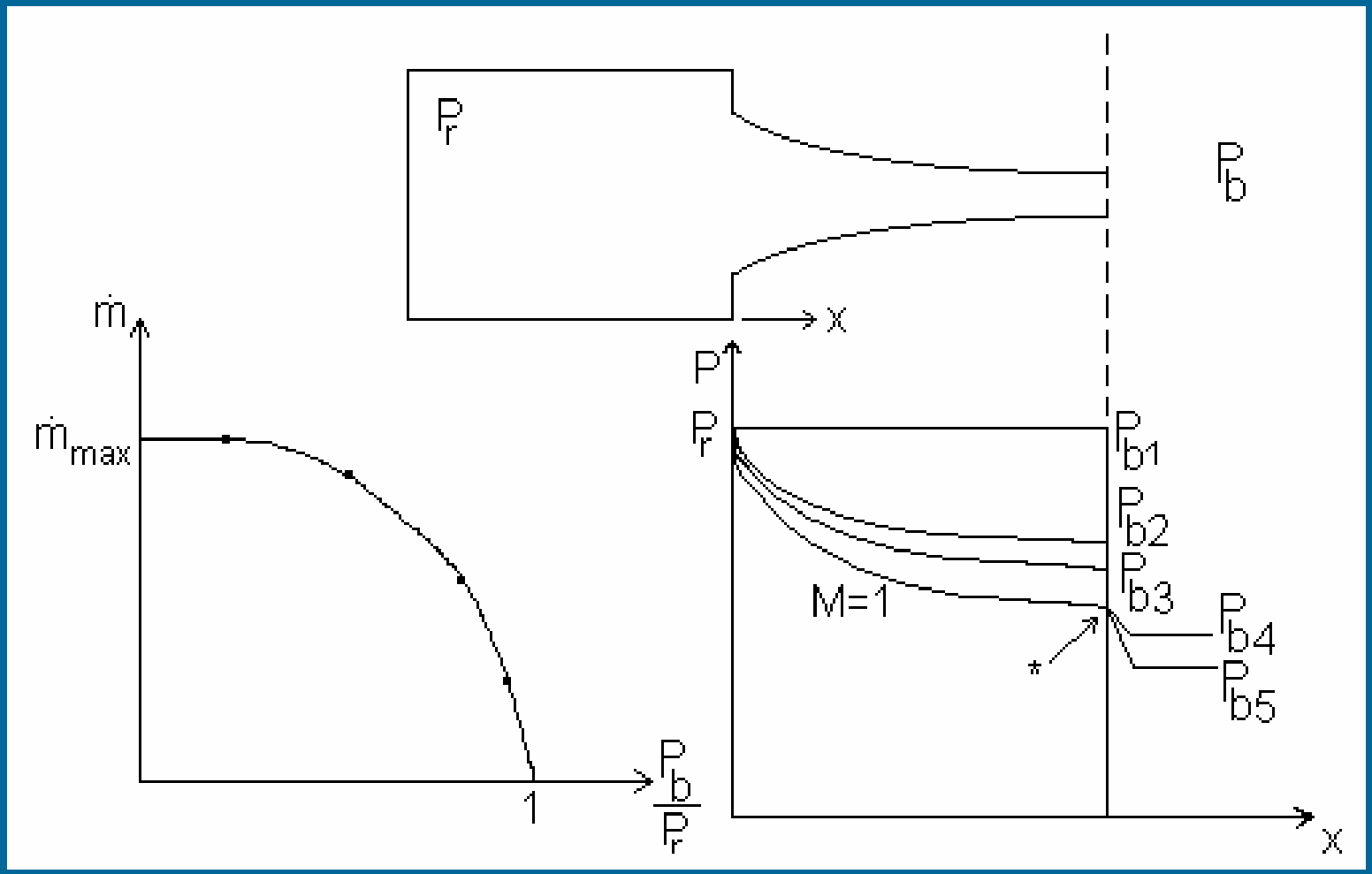
$$\frac{A}{A^*} = \frac{f(\wp, M=1)}{f(\wp, M)} = g(\wp, M) = \frac{\sqrt{\wp}\left(\frac{\wp+1}{2}\right)^{\frac{\wp+1}{2(1-\wp)}}}{M\sqrt{\wp}\left(1+\frac{\wp-1}{2}M^2\right)^{\frac{\wp+1}{2(1-\wp)}}}$$

نمودار A/A* بر حسب ماخ به صورت زیر است:



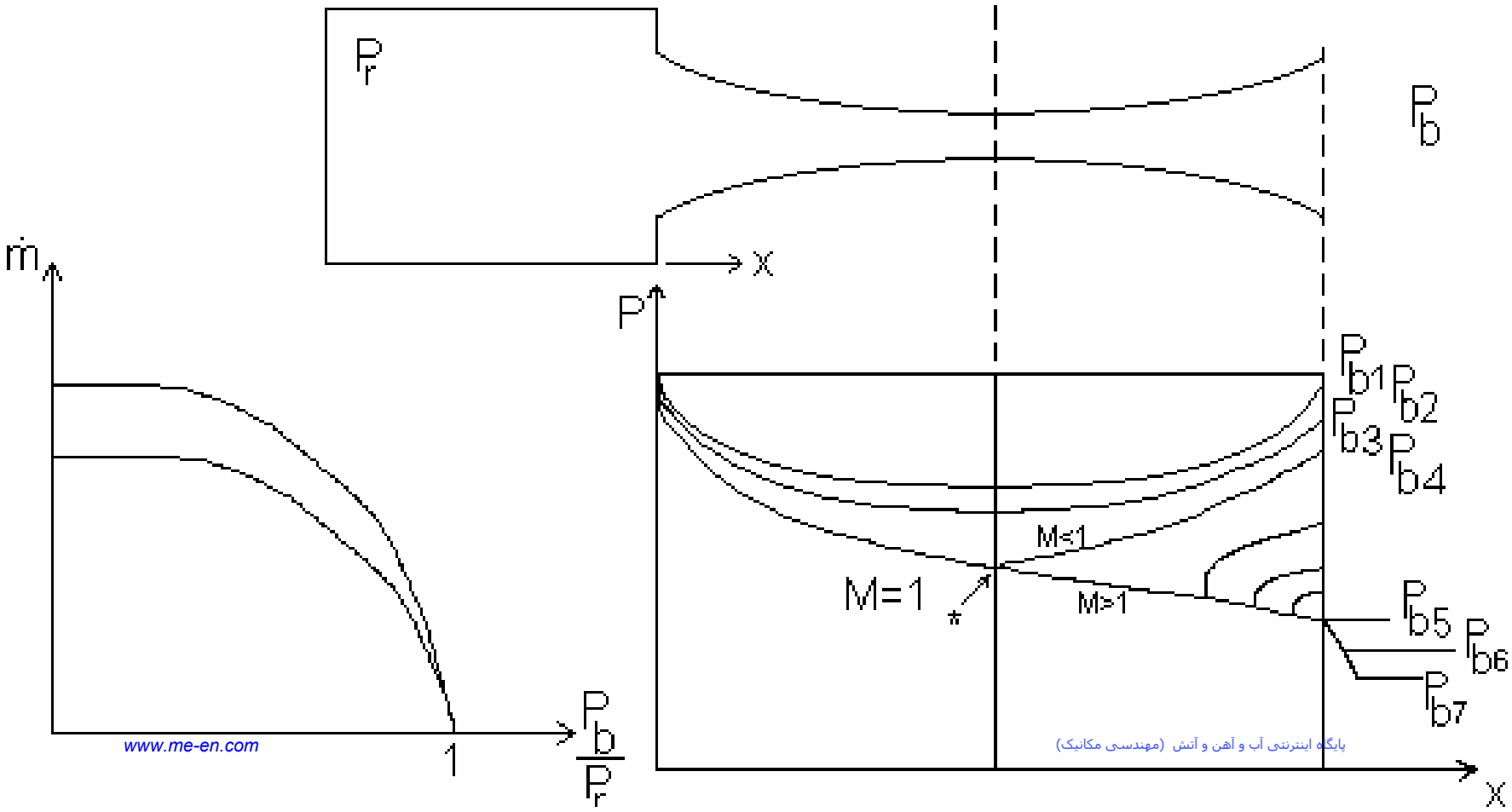
بررسی رفتار سیال در داخل شیپوره:

الف) جریان آیزنتروپیک در یک شیپوره همگرا:



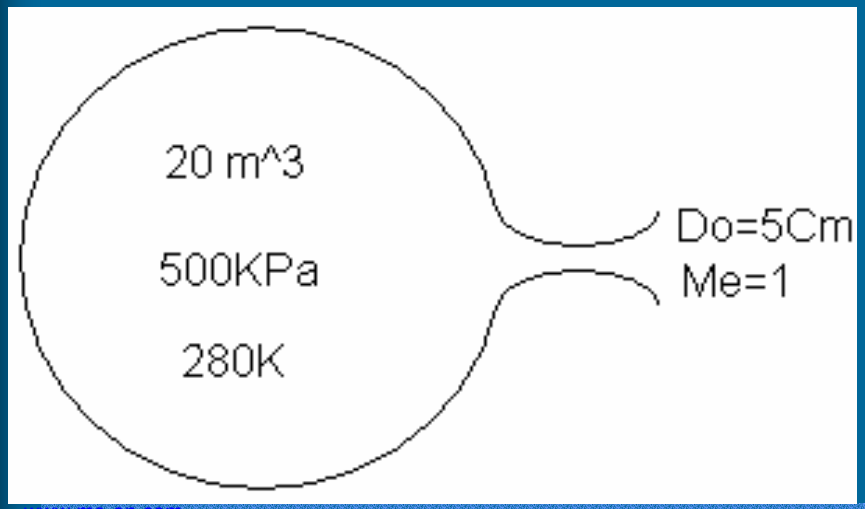
خفگی: اگر شیپوره به شرایط * برسد، یعنی درخروجی ماخ یک باشد وبعد از این فشار، با کاهش فشاردبی تغییرنکند اصطلاحا گویند که شیپوره چوک شده، یا در حالت خفگی است. مقدار فشار مربوط به این حالت را میتوان با قرار دادن Pb به جای P1 و ماخ یک در رابطه Pt/P1 بدست آوریم.

ب) جریان آیزنتروپیک در شیپوره همگرا - واگرا



مساله 3- 21 :

مخزنی کروی به حجم 20 m^3 حاوی هوای فشرده در 500 KPa است. در اثر پاره شدن غشای ایمنی در دیواره مخزن، هوا از سوراخی به قطر 5 Cm از مخزن خارج میشود. چه مدت طول میکشد تا فشار مخزن به 200 KPa برسد؟ فرض کنید دمای هوای داخل مخزن 280 K است و جریان هوا در این سوراخ شبیه جریان آیزنتروپیک درون یک شیپوره همگرا باشد که قطر دهانه خروجی آن 5 Cm است.



$$\dot{m} = \rho A V = \frac{P}{RT} A V$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \frac{0.5283 P_r}{0.287 \times 0.8333 \times 280} \times 5 \times 10^{-4} \times 1 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 0.8333 \times 280} = 1.207 \times 10^{-3} P_r$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v} \rho d\forall + \iint \rho V . dA = 0 \qquad \iiint \rho d\forall = m \qquad \iint \rho V . dA = \dot{m}$$

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{P\forall}{RT}\right) = \frac{dP_r}{dt} \frac{\forall}{RT_r}$$

$$\Rightarrow \frac{\forall}{RT_r} \frac{dP_r}{dt} + 1.207 \times 10^{-3} P_r = 0 \qquad \Rightarrow \frac{20}{0.287 \times 280} \frac{dP_r}{dt} + 1.207 \times 10^{-3} P_r = 0$$

$$\Rightarrow 0.2488 \frac{dP_r}{dt} = -1.207 \times 10^{-3} P_r \qquad \Rightarrow -206.19 \frac{dP_r}{P_r} = dt \qquad \Rightarrow t = -\int_{500}^{200} 206.19 \frac{dP_r}{P_r}$$

$$\Rightarrow t = -206.19 \left(Ln200 - Ln500 \right) = 188.92 S$$

فصل چهارم : موج ضربه ای عمودی

موج ضربه یک فرایند آدیاباتیک است اما آیزنتروپیک نیست، پس دما قبل و بعد از آن ثابت میماند اما فشار تغییر میکند.

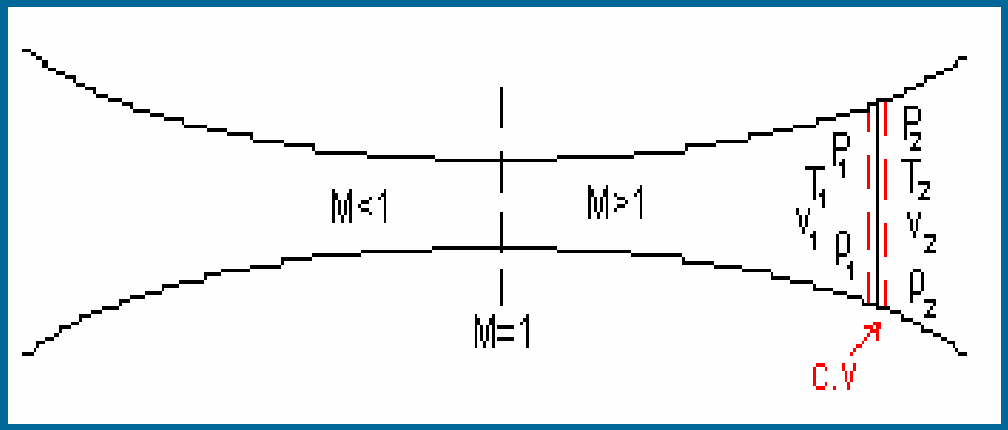
امواج تراکمی امواجی هستند که بصورت پی در پی صادر میشوند، امواج بعدی دارای سرعت بیشتری نسبت به قبلی هستند و میتوانند روی هم سوار شوند.

در حالیکه امواج تراکمی میتوانند با هم جمع شوند امواج انبساطی اصلا نمیتوانند.

روابط برای شناسایی وضعیت سیال در یک موج ضربه:

حجم کنترلی از موج ضربه به صورت زیر در نظر گرفته و روابط بقا را برای آن مینویسیم :

(توجه : در جریان مادون صوت هیچگاه موج ضربه نداریم.)



قانون بقاي جرم:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \xrightarrow{A_1 = A_2} \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

معادله مومنتوم (در حالت پايدار):

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 = \iint_s v_x (\rho \vec{v}.d\vec{A})$$

$$\Rightarrow P_1 A_1 - P_2 A_2 = \rho_2 A_2 v_2^2 - \rho_1 A_1 v_1^2$$

$$\xrightarrow{A_1 = A_2} \quad P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2$$

معادله بقاي انرژي:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v} e \rho dV + \iint_s (h + \frac{v^2}{2} + gz) \rho \vec{v} d\vec{A} = \frac{d}{dt}(Q - W)$$

$$\rightarrow \quad h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

$$dh = C_p dT \quad , \quad T_t = T\left[1 + \frac{(\wp - 1)}{2} M^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad T_1\left[1 + \frac{\wp - 1}{2} M_1^2\right] = T_2\left[1 + \frac{\wp - 1}{2} M_2^2\right]$$

با استفاده از معادله مومنتوم داریم:

$$P_1\left[1 + \wp M_1^2\right] = P_2\left[1 + \wp M_2^2\right]$$

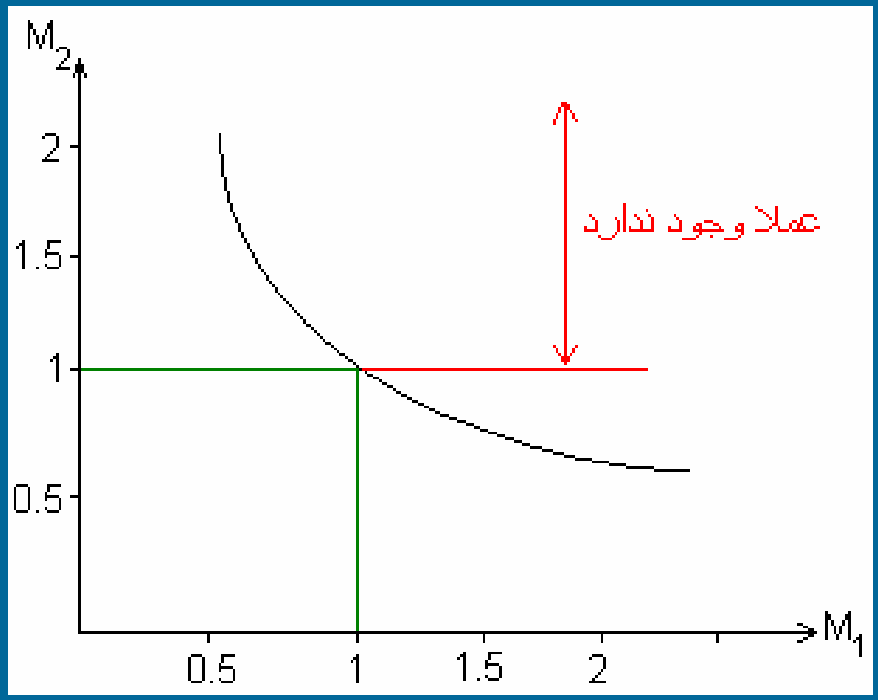
با استفاده از معادله پیوستگي و جدا کردن نسبت دماها و فشارها داریم :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\wp - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\wp - 1}{2} M_2^2} \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{1 + \wp M_2^2}{1 + \wp M_1^2}$$

و از ترکیب این دو معادله میتوانیم رابطه بین ماخها را بیابیم.

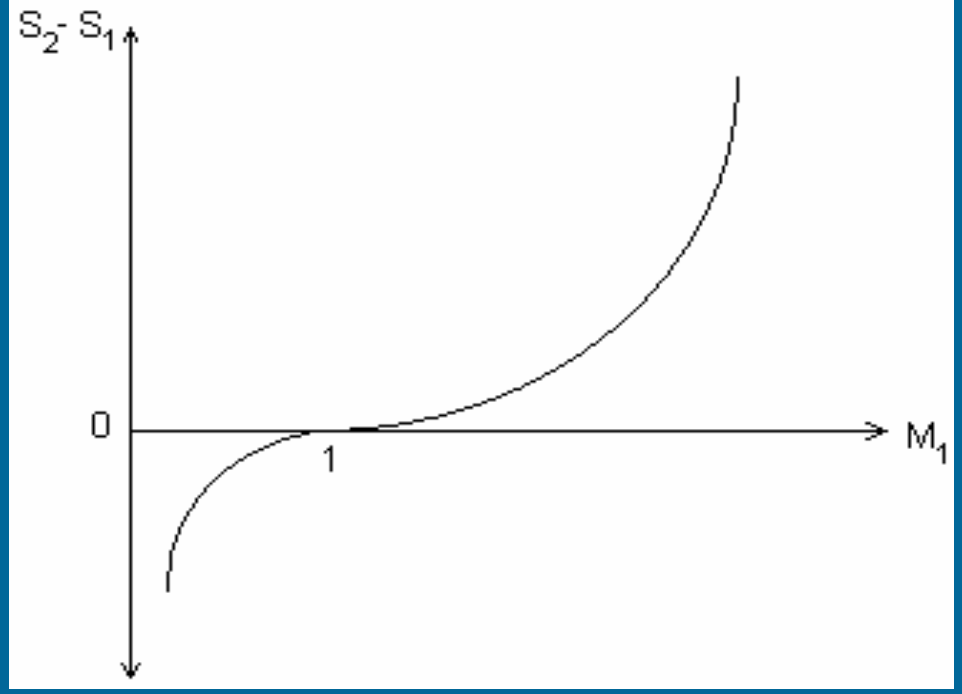
$$\frac{M_1}{1 + \wp M_1^2}\sqrt{1 + \frac{\wp - 1}{2} M_1^2} = \frac{M_2}{1 + \wp M_2^2}\sqrt{1 + \frac{\wp - 1}{2} M_2^2}$$

نحوه تغییرات M2 بر حسب M1 به صورت زیر است :



نحوه تغییرات آنتروپی در موج ضربه به صورت زیر است:

$$S_2 - S_1 = C_p Ln\frac{T_2}{T_1} - RLn\frac{P_2}{P_1}$$



با استفاده از روابطي كه براي ماخ و دما در دوطرف موج يافتيم داريم :

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\left(1+\frac{\wp-1}{2}M_1^{\,2}\right)\left(\frac{2\wp}{\wp-1}M_1^{\,2}-1\right)}{M_1^{\,2}\left(\frac{2\wp}{\wp-1}+\frac{\wp-1}{2}\right)}$$

براي فشار نيز خواهيم داشت :

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{1+\wp M_1^{\,2}}{1+\wp M_2^{\,2}}=\frac{2\wp M_1^{\,2}}{\wp+1}-\frac{\wp-1}{\wp+1}$$

با استفاده از قانون پيوستگي و ساده سازي داريم:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{(\wp+1)M_1^{\,2}}{(\wp-1)M_1^{\,2}+2}$$

با استفاده از روابط دما و فشار و آنتروپی ، میتوانیم مقدار آنتروپی سیال را نیز برای قبل و بعد از ضربه بیابیم

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = -Ln\frac{P_{t2}}{P_{t1}} \quad , \quad \frac{P_{t2}}{P_{t1}} = \frac{P_{t2}}{P_2}\cdot\frac{P_2}{P_1}\cdot\frac{P_1}{P_{t1}}$$

$$\frac{P_{t2}}{P_2} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^{\,2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad , \quad \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{2\gamma M_1^{\,2}}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)$$

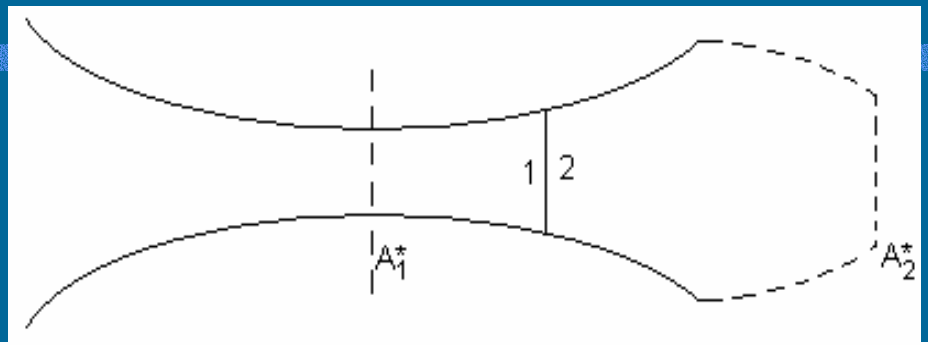
$$\frac{P_1}{P_{t1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^{\,2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{P_{t2}}{P_{t1}} = \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2}M_1^{\,2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^{\,2}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{1}{\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^{\,2} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

نتایج کلی حاصل از فرایند موج ضربه:

- ماخ کم میشود .
- دما زیاد میشود .
- فشار زیاد میشود .
- دمای سکون ثابت میماند .
- فشار سکون کم میشود .
- سطح مرجع ها تغییر میکنند .

میخواهیم ارتباط بین سطح مرجع و یک پارامتر دیگر مثلا فشار سکون را قبل و بعد از ضربه بیابیم . شکل زیر را در نظر بگیرید .



$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \dot{m}_1^* = \dot{m}_2^*$$

$$\frac{P_{t1} A_1^*}{\sqrt{T_{t1}}} f(\wp, M_1) = \frac{P_{t2} A_2^*}{\sqrt{T_{t2}}} f(\wp, M_2)$$

$$* \Rightarrow f(\wp, M_1) = f(\wp, M_2) \ , \ adiabatic \Rightarrow T_{t1} = T_{t2}$$

$$\rightarrow P_{t1} A_1^* = P_{t2} A_2^* \ , \ P_{t2} < P_{t1} \Rightarrow A_2^* > A_1^*$$

تاکنون آنچه بررسی نمودیم مربوط به امواج ضربه ای ساکن بودند ، اما همواره امواج ساکن نیستند .

برای آنکه بتوانیم از همین روابط بدست آمده برای موج متحرک ، مثل موج تراکمی استفاده کنیم باید جای ناظر را تغییر دهیم ، ناظر روی موج سوار شود تا موج را ساکن ببیند .

در این حالت سیال با سرعت Vs به موج ضربه نزدیک و با سرعت Vs-Vg از آن دور میشود .

خواص استاتیک ثابتند و به ناظر وابسته نیستند ، اما خواص سکون به ناظر وابسته اند .

مقدار سرعت سیال به صورت زیر بدست می آید :

$$\frac{v_s}{v_s - v_g} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2} \quad , \quad M_1 = \frac{v_s}{a}$$

$$\Rightarrow \quad v_s = \frac{\dfrac{(\gamma+1)v_s}{a_1^2} + \sqrt{\dfrac{(\gamma+1)^2 v_g^2}{a_1^2} + \dfrac{16}{a_1^2}}}{\dfrac{4}{a_1^2}}$$

به این ترتیب دو دسته مساله خواهیم داشت :

1- Vs معلوم باشد :

با داشتن Vs مقدار M1 را می یابیم و با داشتن M1 مقدار M2 را می یابیم .

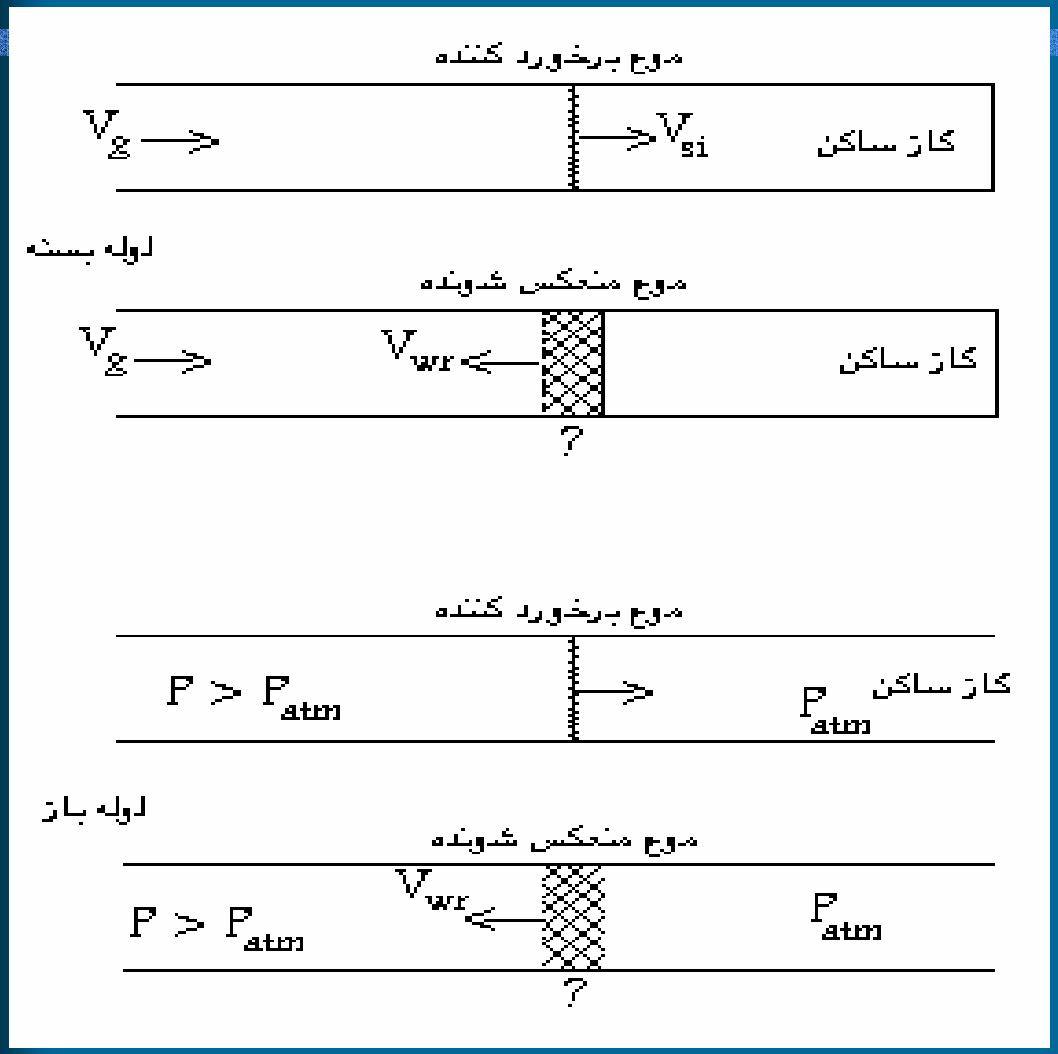
و با استفاده از جداول V1/V2 یا ρ1/ ρ2 را یافته و با آن V2 را میا بیم

با داشتن V2 میتوانیم Vg را از V2=Vs-Vg بیابیم .

2- Vg معلوم باشد :

با داشتن Vg مقدار Vs از فرمول بدست می آید و با آن M1 پیدا میشود و با آن تمام نسبتها از جدول بدست می آید .

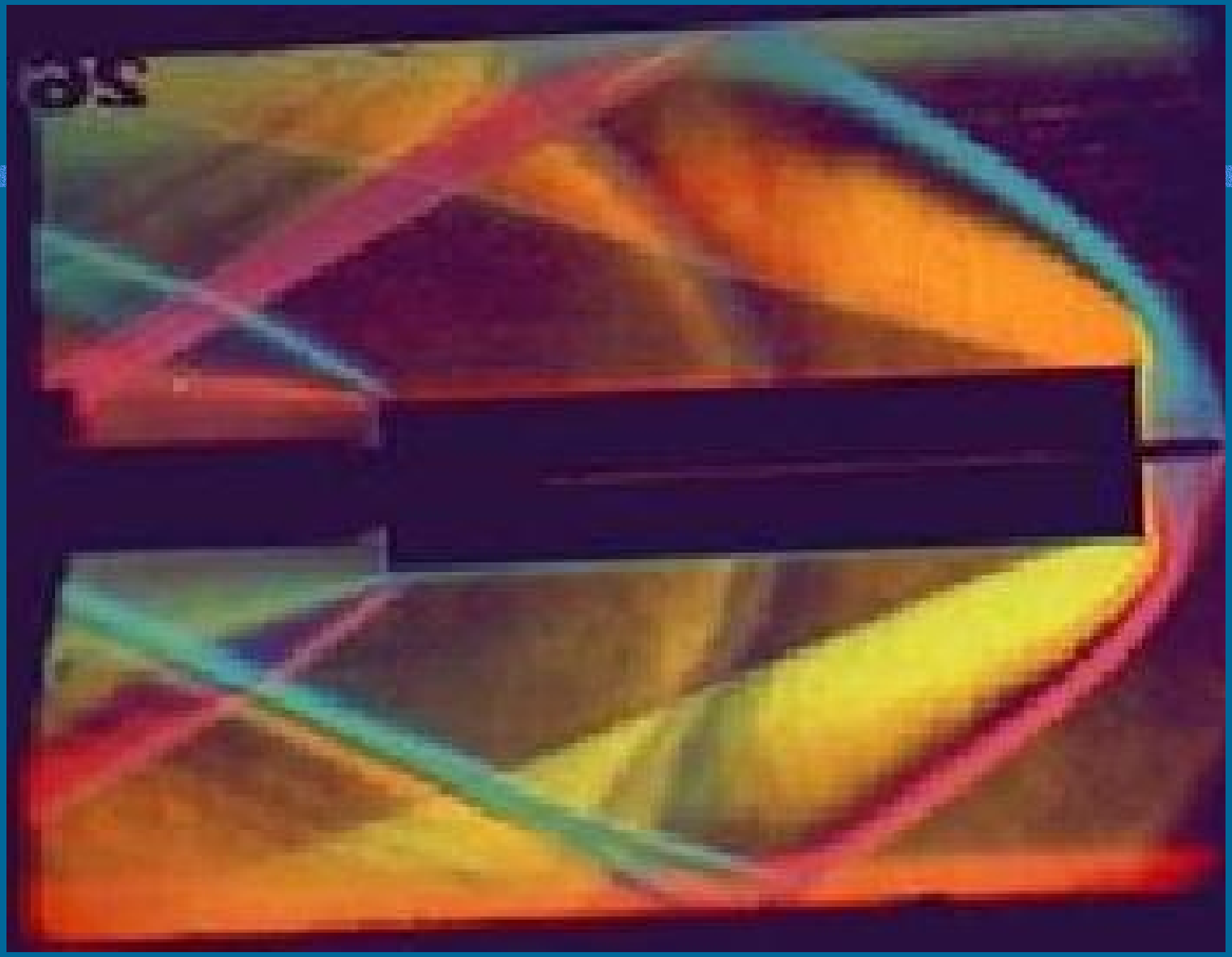
امواج ضربه ای عمودی منعکس شده



وقتی موج به انتهای لوله برخورد میکند امواج انعکاسی خواهیم داشت. دو حالت را در نظر میگیریم:

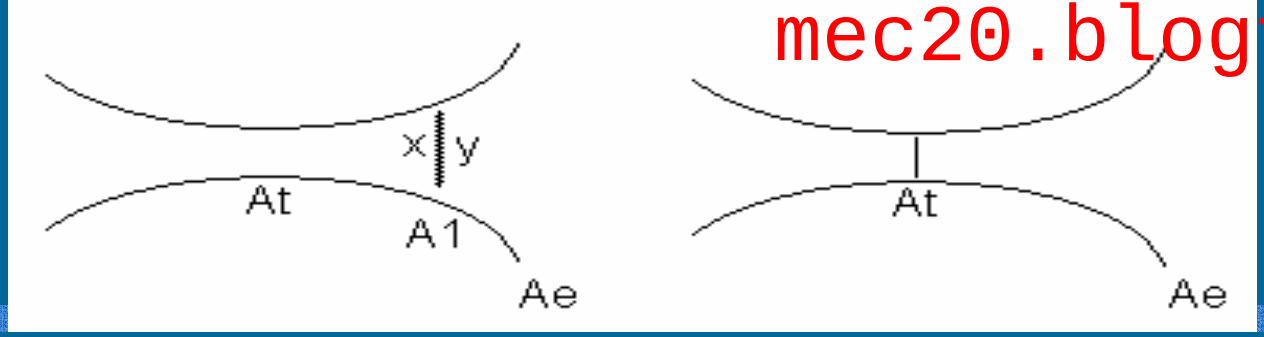
1- لوله با انتهای بسته

2- لوله با انتهای باز



مساله 4 - 9 :

یک موج ضربه ای در قسمت واگرای شیپوره های همگرا - واگرا در جایی که مساحت مقطع 1.1برابر مساحت گلوگاه است تشکیل میشود. چنانچه نسبت مساحت مقطع خروجی شیپوره به مساحت گلوگاه آن 2.2 باشد، کاهش در سرعت خروجی شیپوره را به علت حضور موج ضربه ای به دست آورید(با سرعت خروجی در جریان کاملا منبسط شده آیزنتروپیک فراصوت در شیپوره مقایسه کنید). فرض کنید جریان از سرعت اولیه ناچیز منبسط میشود، دمای سکون جریان در دو حالت یکی است، و سیال عامل بخار آب است که مثل گاز کامل با $\gamma=1.3$ (ثابت) رفتار میکند.



$$\frac{A_e}{A^*} = 2.2 \rightarrow M_e = 2.3$$

$$\frac{A_1}{A_t} = 1.1 \xrightarrow{S=Cte} M_x = 1.359 \xrightarrow{shock} M_y = 0.753 \xrightarrow{S=Cte} \frac{A_y}{A_y^*} = 1.0627$$

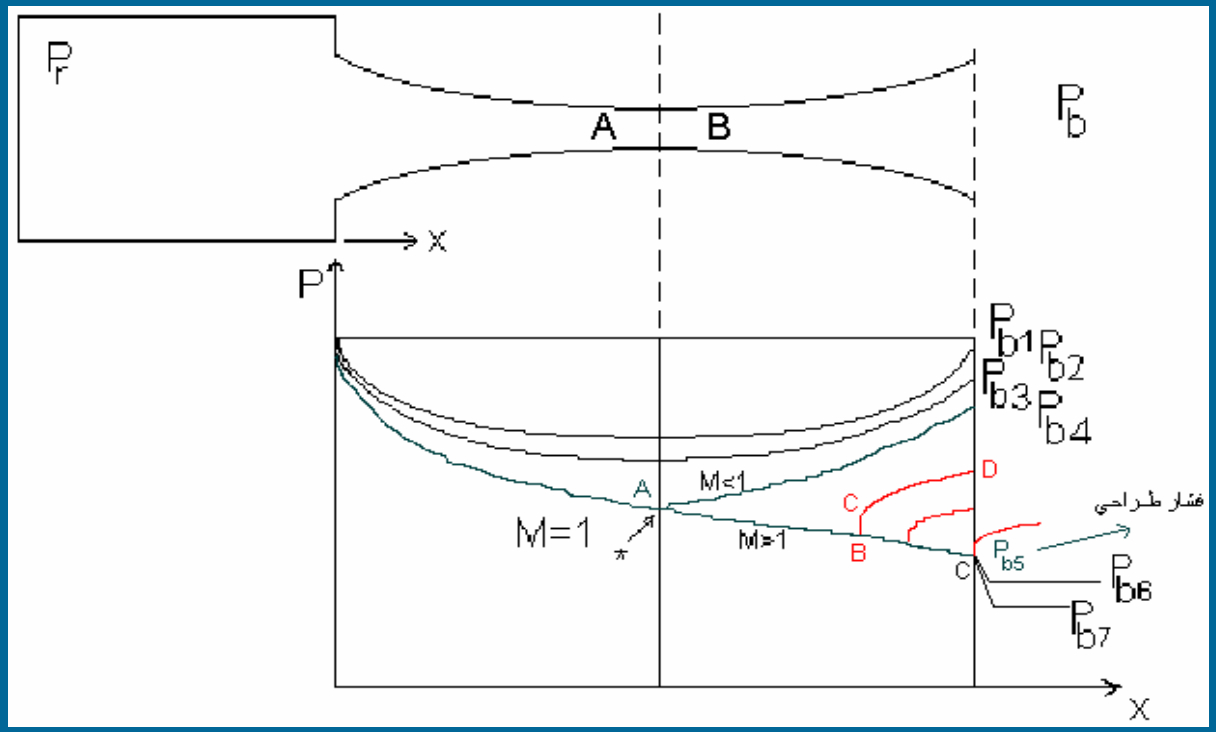
$$\frac{A_e}{A_y^*} = \frac{A_e}{A_y}\frac{A_y}{A_y^*} = \frac{2.2}{1.1} \times 1.0627 = 2.1254 \qquad \Rightarrow M_e = 0.288$$

$$\frac{V_{e2} - V_{e1}}{V_{e1}} = \frac{V_{e2}}{V_{e1}} - 1 = \frac{M_{e2}}{M_{e1}}\sqrt{\frac{1 + \frac{\wp}{2} M_{e1}^2}{1 + \frac{\wp}{2} M_{e2}^2}} - 1 = -0.736$$

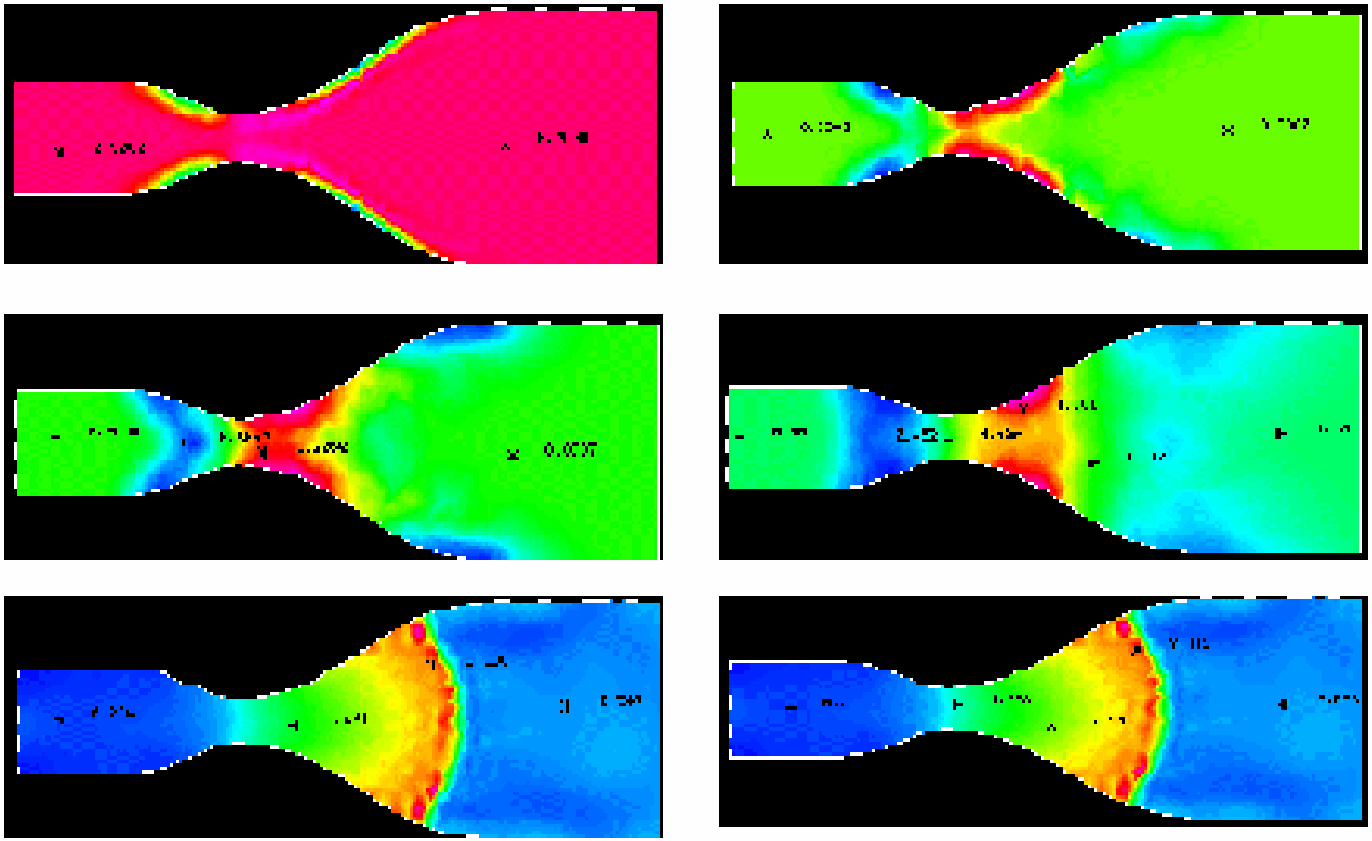
فصل پنجم : کاربرد موجهای ضربه ای

اولین و مهمترین کاربرد ازموج ضربه ای در جریان آیزنتروپیک ، در شیپوره همگرا – واگراست.

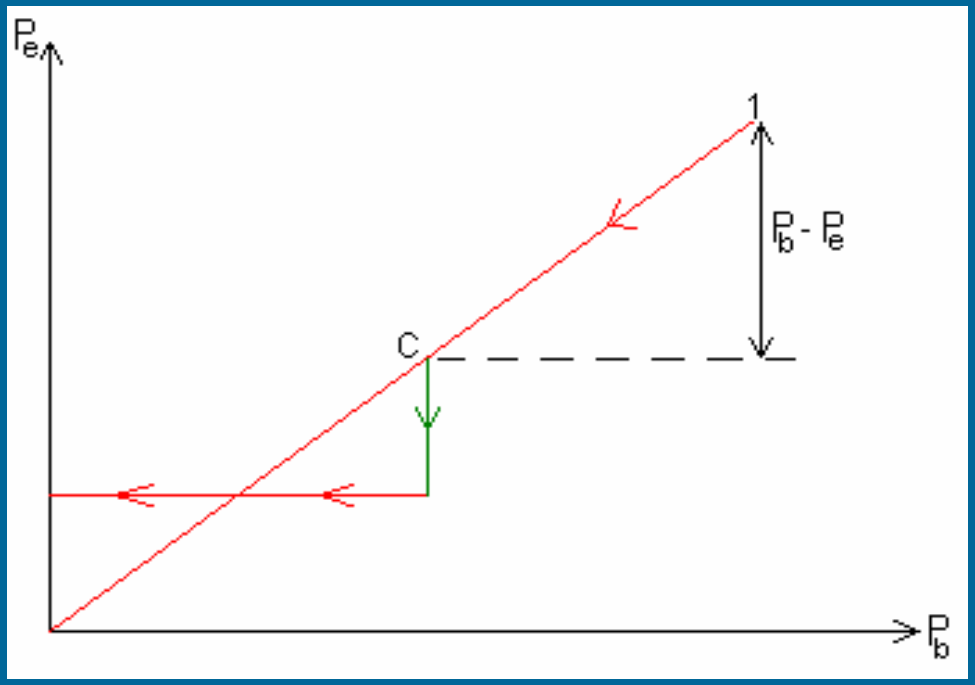
الف) عملکرد شیپوره همگرا – واگرا



VEINE SUPERSONIQUE (ii)



نقطه طراحی : فشار نقطه طراحی فشاری است که اگر در آن شیپوره همگرا – واگرا را راه اندازی کنیم ، جریان در قسمت واگرا مافوق صوت و آیزنتروپیک است.



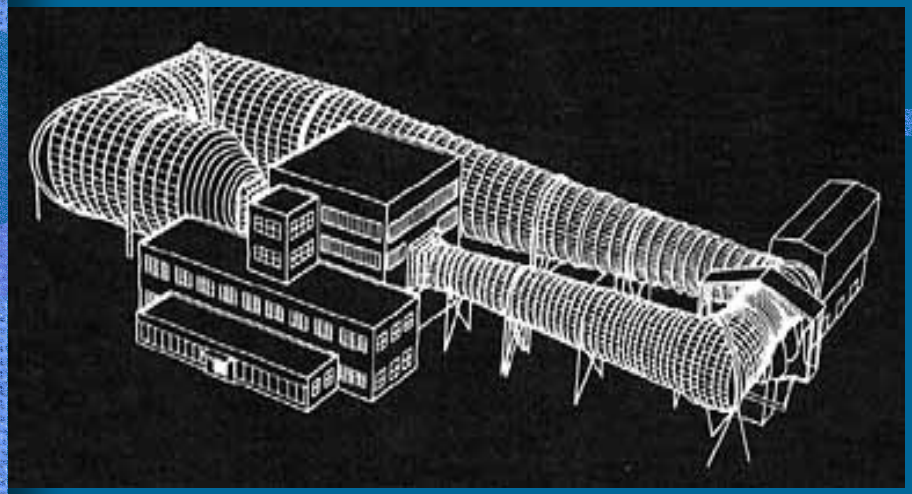
ب) تونل باد

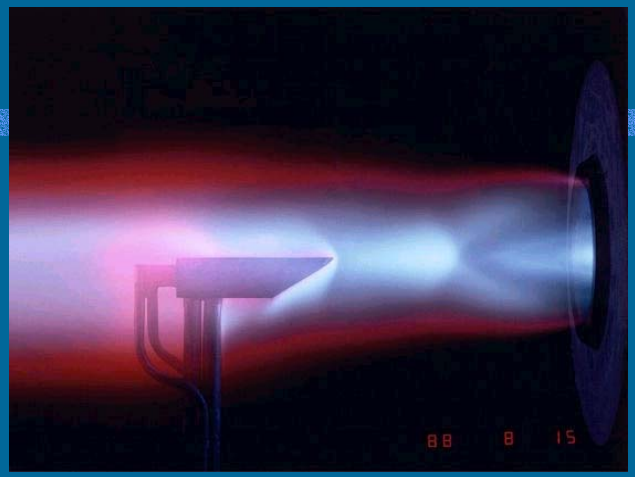
تعريف :

تونل باد وسيله اي است كه :

- براي بررسي اثر نيروهاي فشاري روي مدل به كار مي رود
- براي بررسي نيروهاي درگ
- براي بررسي اثرهاي اصطكاك
- تعيين شاخصهاي مطلوب در شاخه آئرديناميك

چند تونل باد

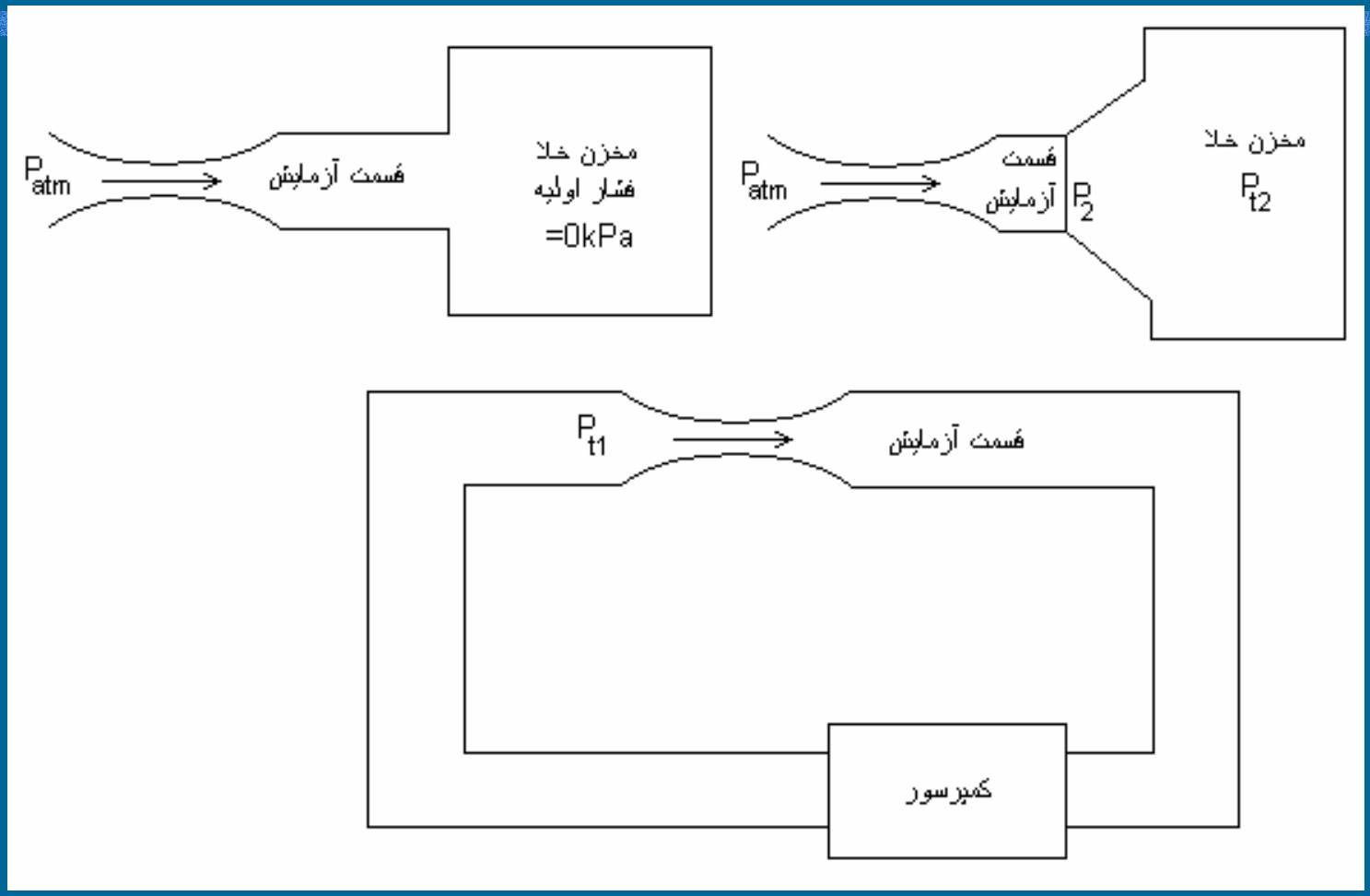




انواع تونل باد:

- Low-speed wind tunnel
- Transonic wind tunnel
- Supersonic wind tunnel
- Hypersonic wind tunnel
- Hotshot wind tunnel
- Open-return wind tunnel (Eiffel type)
- Closed-return wind tunnel
- Rollimg wind tunnel

ب) تونل باد فراصوت :



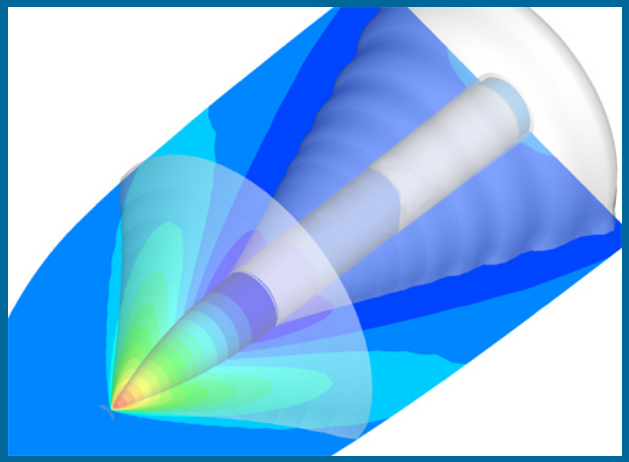
Supersonic W.T

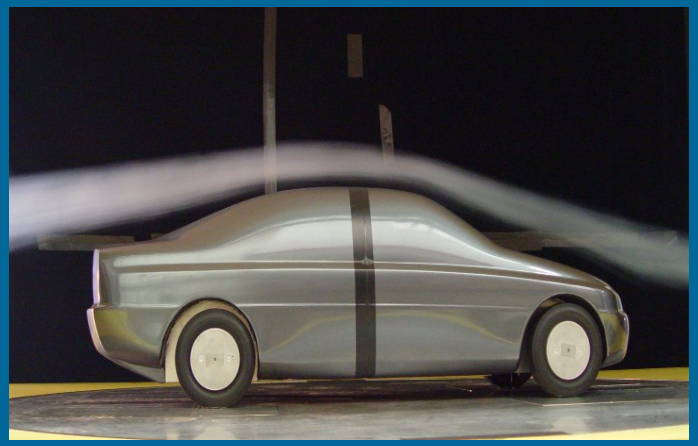
- براي آزمايش در سرعتهاي بسيار بالاتر از صوت به كار مي روند
- عدد ماخ در آنها به بالاتر از 5 نسبت داده مي شود
- براي رسيدن به سرعتهاي بالا از شيپوره هاي همگرا-واگرا استفاده ميشود
- سرعت نهايي از نسبت مساحت خروجي به مساحت گلوگاه بدست ميآيد
- براي تأمين سرعت وتوانهاي بالا از مخزن ذخيره فشار بالا يا از مخزن ذخيره خلا استفاده مي شود

Hypersonic W.T

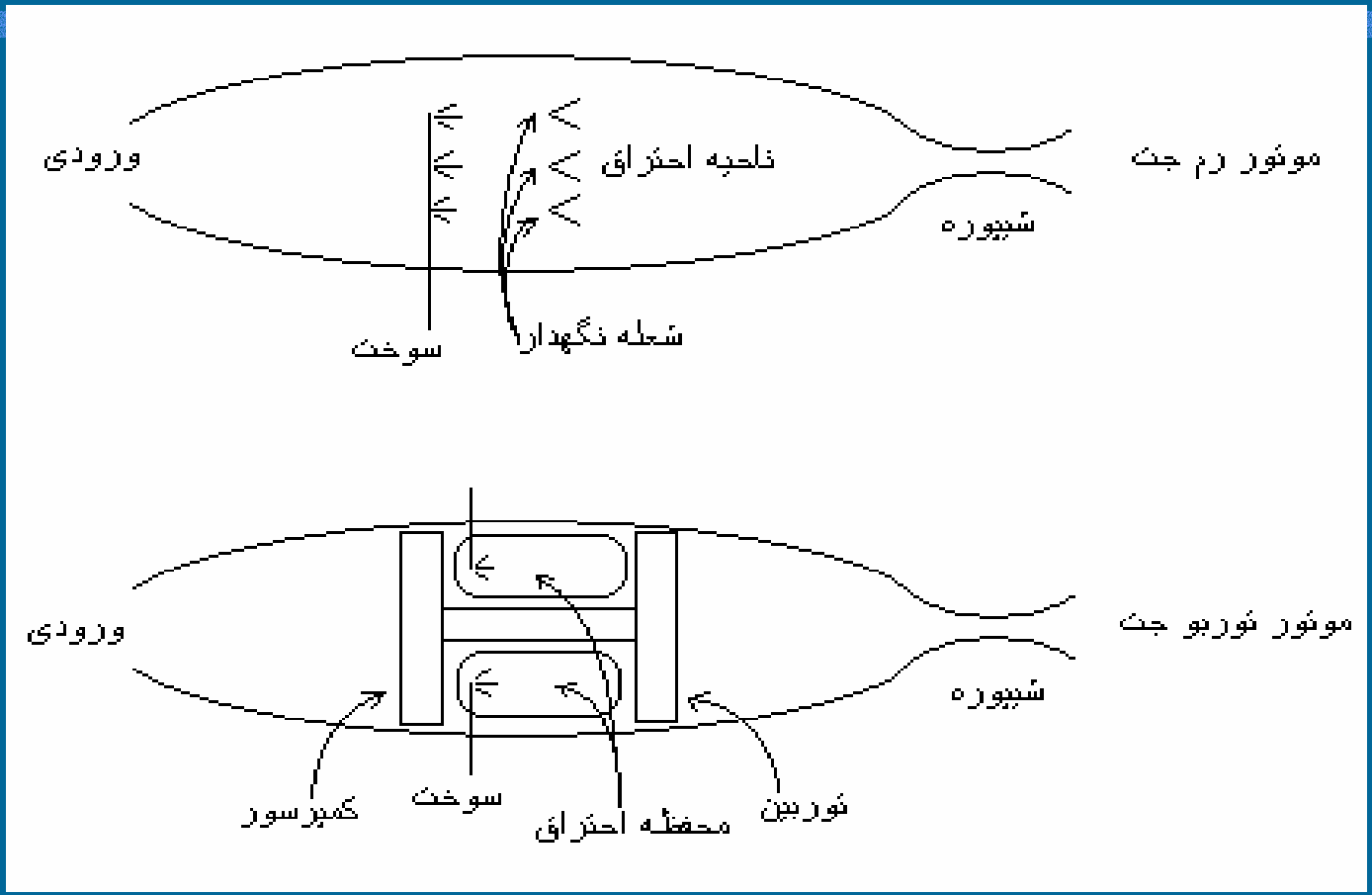
- عدد ماخ در آنها حتي به 15 هم ممكن است برسد
- براي سرعتهاي بالا كنترل فشار ودما بسيار مهم است

كاربرد هاي تونل باد در صنعت

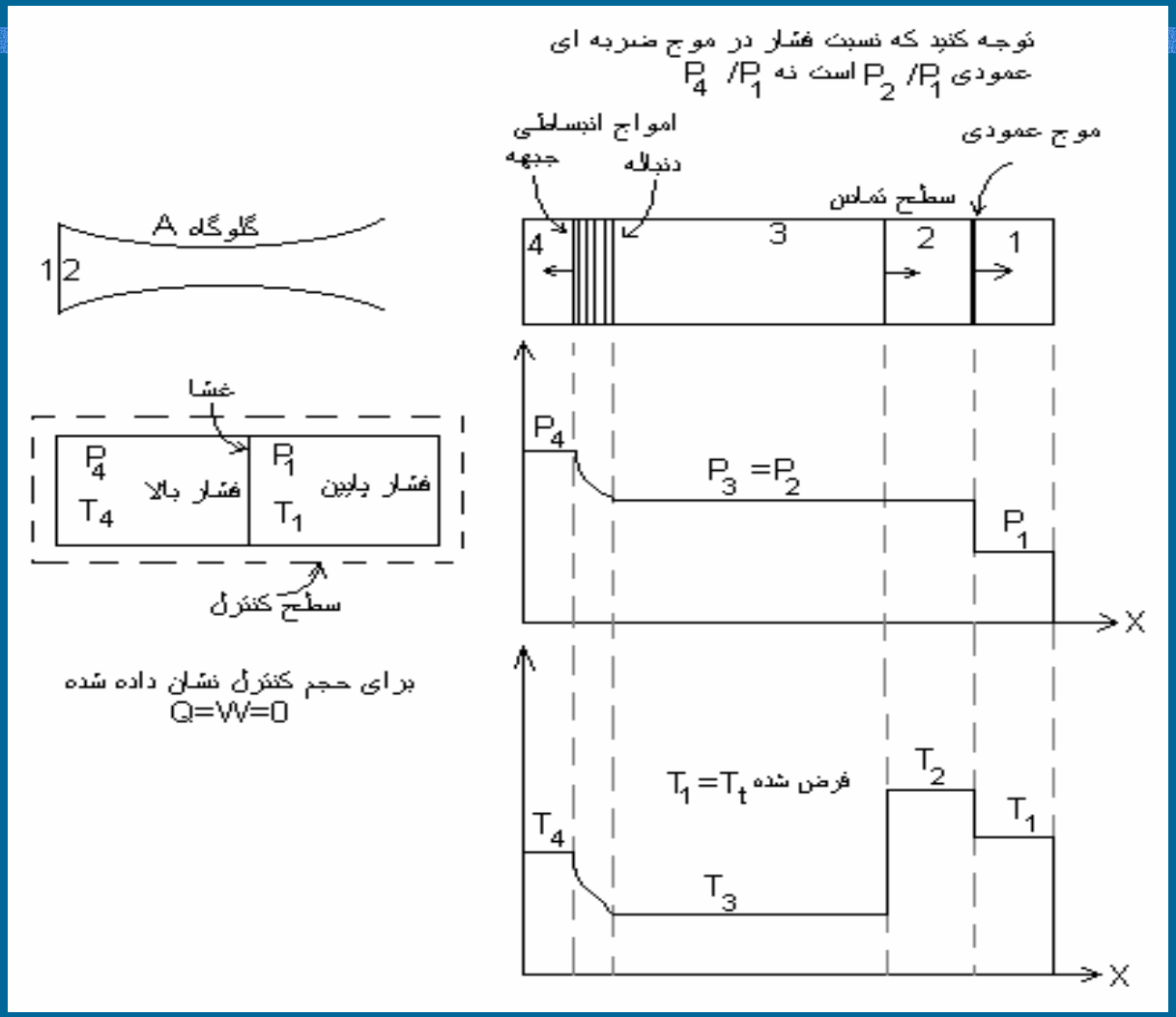




پ) دیفیوزر فراصوت همگرا – واگرا :



ت) لوله ضربه و جریان یک بعدی ناپایدار :



مساله 5 - 11 :

دیفیوزر فراصوت همگرا - واگرا یی در ماخ 3 به کار گرفته میشود. در دیفیوزر از گلوگاه با مقطع متغیر برای بلعیدن موج ضربه ای اولیه استفاده میشود. چند درصد افزایش در مساحت گلوگاه ضروری است ؟ مساله را برای هوا و هلیوم به عنوان سیالهای عامل حل کنید.

$$AIR \rightarrow \wp = 1.4$$

$$M_1 = 3 \xrightarrow{chart\ (1-1)} \frac{A}{A_1^*} = 4.235$$

$$M_1 = 3 \xrightarrow{chart\ (1-2)} M_2 = 0.4752 \xrightarrow{(1-1)} \frac{A}{A_2^*} = 1.3905$$

$$\Rightarrow \frac{A_1^*}{A_2^*} = 0.3283 \qquad \Rightarrow [(1 - 0.3283)/0.3283] \times 100 = 204.5\%$$

$$He \rightarrow \wp = 5/3$$

$$M_1 = 3 \xrightarrow{(1-1)} \frac{A}{A_1^*} = 3$$

$$M_1 = 3 \xrightarrow{(1-2)} M_2 = 0.5222 \xrightarrow{(1-1)} \frac{A}{A_2^*} = 1.2843$$

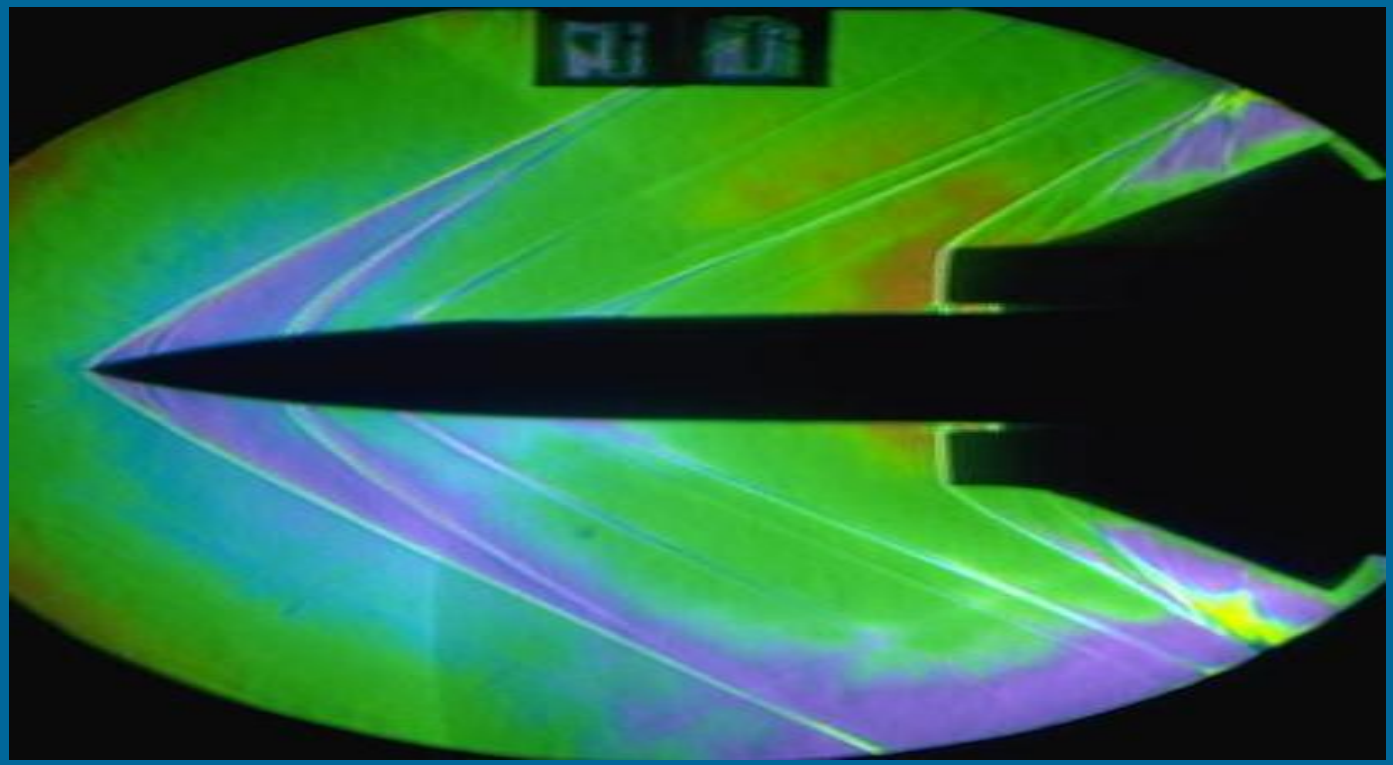
$$\Rightarrow \frac{A_1^*}{A_2^*} = 0.4281 \qquad \Rightarrow [(1 - 0.4281)/0.4281] \times 100 = 133.5\%$$

امواج باقیمانده عبارتند از:

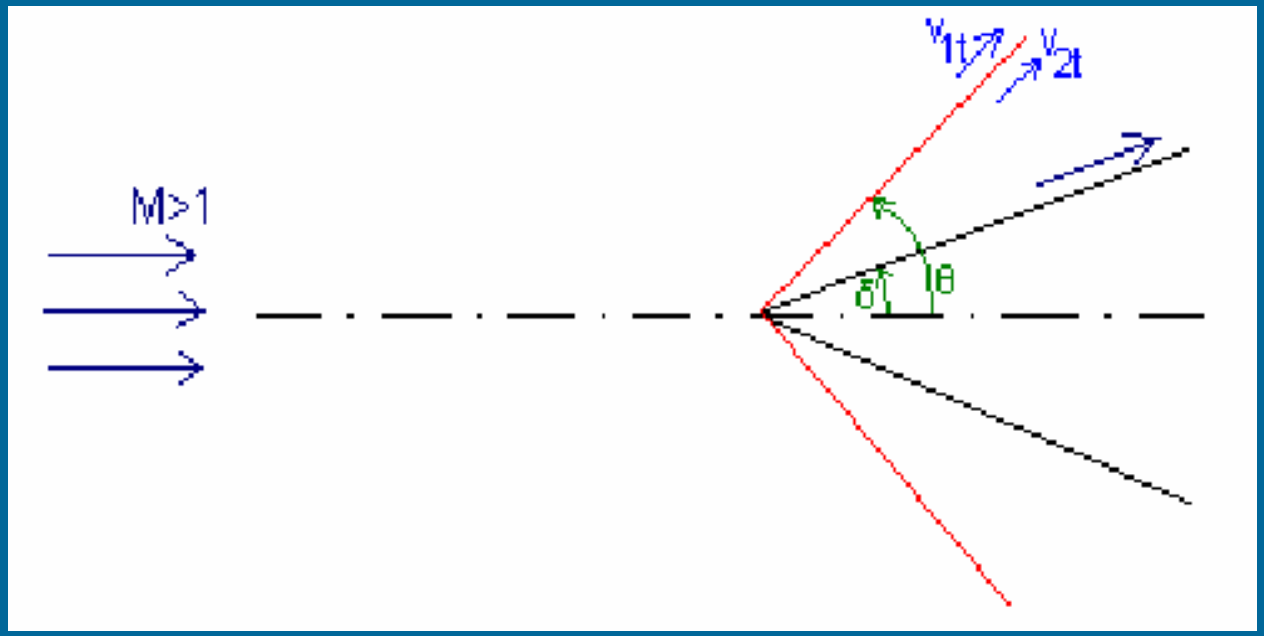
1- امواج ضربه ای مایل

2 – امواج انبساطی پرانتل – میر

فصل ششم : موج ضربه ای مایل



امواج ضربه ای مایل : این امواج نسبت به جهت جریان زاویه دار هستند و اگر سیال با ماخ بیشتر از یک، به یک دماغه نزدیک شود رخ می دهند.



کاربرد امواج مایل :

1- یک پرنده با ماخ بزرگ و با دماغه تیز .

2- دهانه ورودی کمپرسورها .

در دو طرف یک موج مایل افت فشار نسبت به موج عمودی کمتر است ، بنابراین انرژی کمتری هدر میرود، پس اگر یک موج عمودی را به تعدادی امواج مایل تقسیم کنیم به نفع ماست. به همین دلیل مایلیم نسبت متغیرهای دو طرف موج را بیابیم .

در این مورد نیز مشابه موج قائم قوانین بقا را مینویسیم .

1- معادله پیوستگی :

$$\iint_s \rho \vec{v}.d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 v_{1n} A_1 = \rho_2 v_{2n} A_2$$

$$\xrightarrow{A_1 = A_2} \quad \rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}$$

2- معادله مومنتوم :

الف) در جهت قائم :

$$\Sigma \vec{f} = \iint_s \vec{v}\left(\rho \vec{v}.d\vec{A}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P_1 A_1 - P_2 A_2 = \rho_2 A_2 v_{2n}{}^2 - \rho_1 A_1 v_{1n}{}^2$$

$$\Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \rho_2 v_{2n}{}^2 - \rho_1 v_{1n}{}^2$$

ب) در جهت مماسي :

$$\iint \vec{v}_t \left(\rho \vec{v}.d\vec{A} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_{1t}\left(\rho_1 A_1 v_{1n}\right) = v_{2t}\left(\rho_2 A_2 v_{2n}\right)$$

$$\xrightarrow{A_1 = A_2} \quad v_{1t}\left(\rho_1 v_{1n}\right) = v_{2t}\left(\rho_2 v_{2n}\right)$$

$$\xrightarrow{\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}} \quad v_{1t} = v_{2t}$$

3- معادله انرژي :

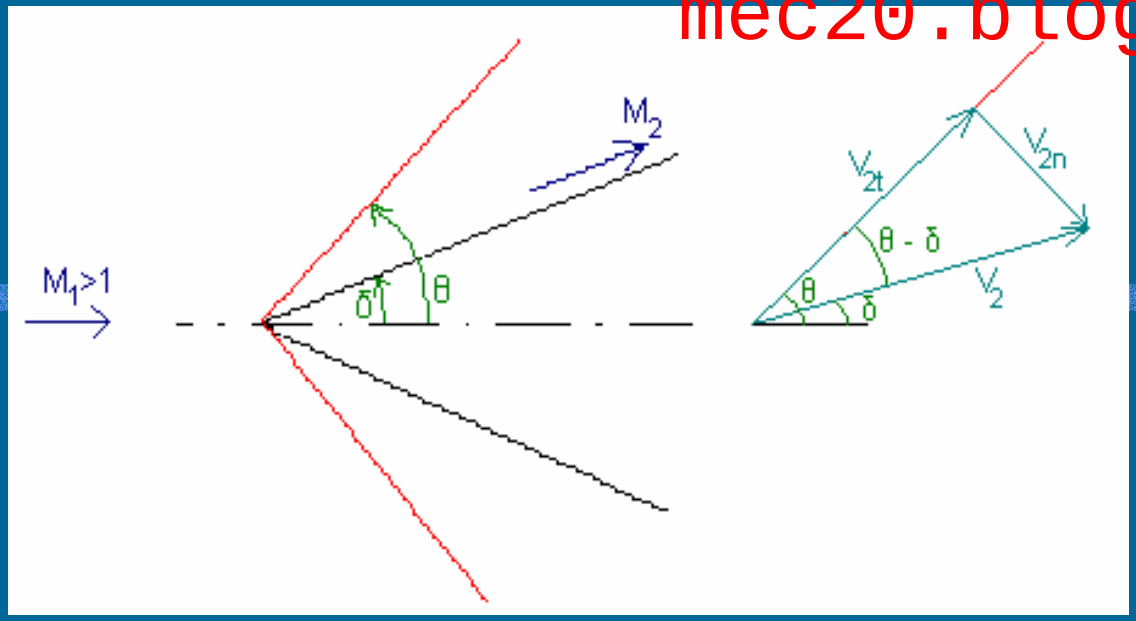
$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad h_1 + \frac{v_{1t}^2 + v_{1n}^2}{2} = h_2 + \frac{v_{2t}^2 + v_{2n}^2}{2}$$

$$\xrightarrow{v_{1t} = v_{2t}} \quad h_1 + \frac{v_{1n}^2}{2} = h_2 + \frac{v_{2n}^2}{2}$$

برخی خصوصیات موج ضربه ای مایل :

- در موج ضربه ای مایل ، ماخ نرمال کمتر از یک و ماخ کلی بیشتر از یک است .
- موج ضربه ای مایل نسبت به موج ضربه ای قائم ضعیفتر است و افت فشار در آن کمتر از موج قائم است .
- موج ضربه ای مایل مثل قائم آدیاباتیک است .



θ : زاويه موج (مجهول) δ : زاويه حمله (معلوم)

$$\begin{cases} M_{1n} = M_1 Sin\theta \\ M_{1t} = M_1 Cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{2n} = M_2 Sin(\theta - \delta) \\ M_{2t} = M_2 Cos(\theta - \delta) \end{cases}$$

اگر موج قوي باشد θ بزرگتري دارد.

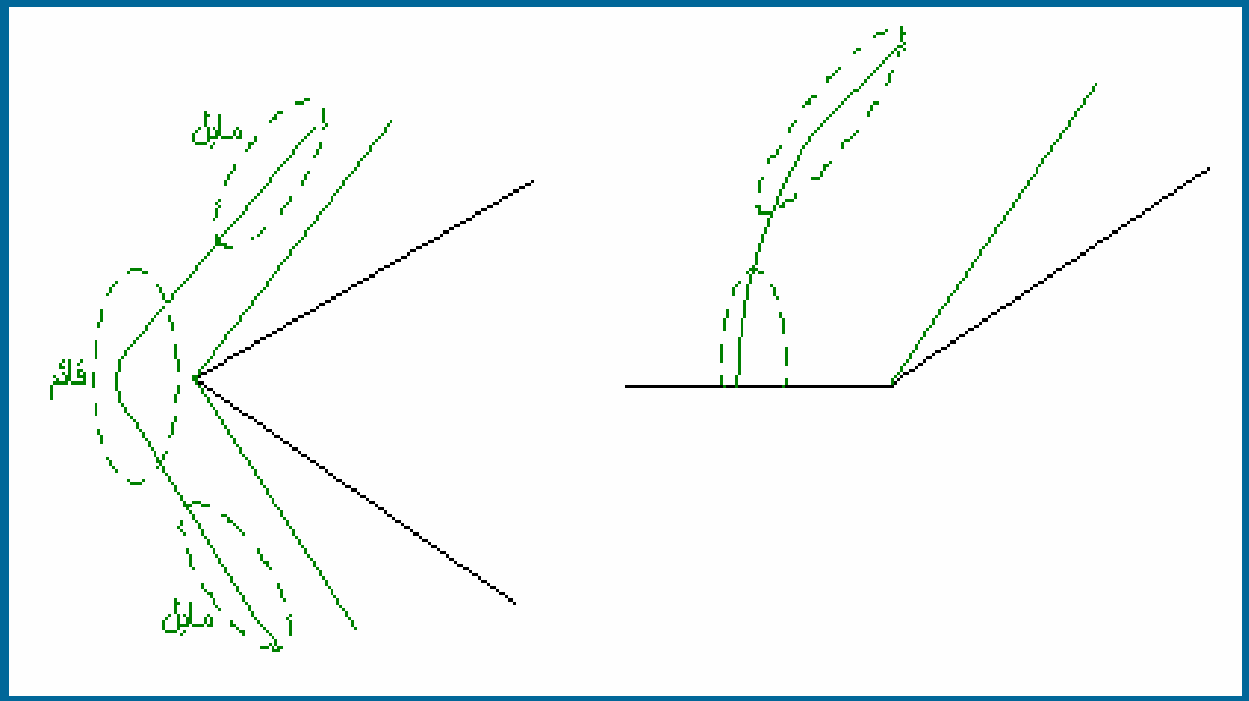
براي بدست آوردن مقادير مورد نياز ميتوانيم به پيوست 3 كتاب مراجعه كنيم.

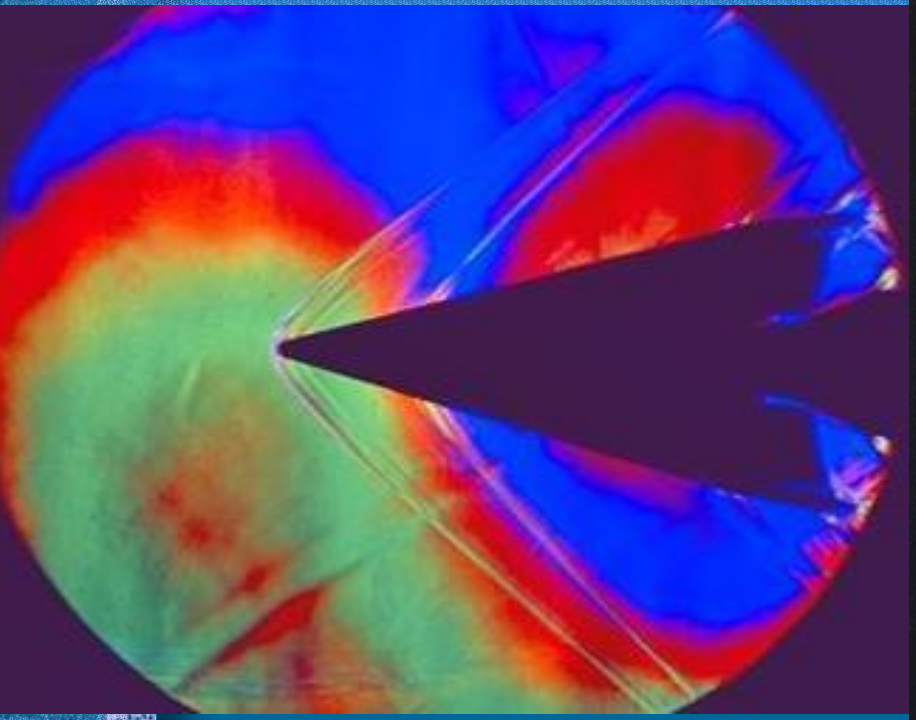
امواج ضربه ای مایل از نوک جسم جدا شده و در نوک آن استقرار نمی یابند ، به این ترتیب دو ناحیه خواهیم داشت :

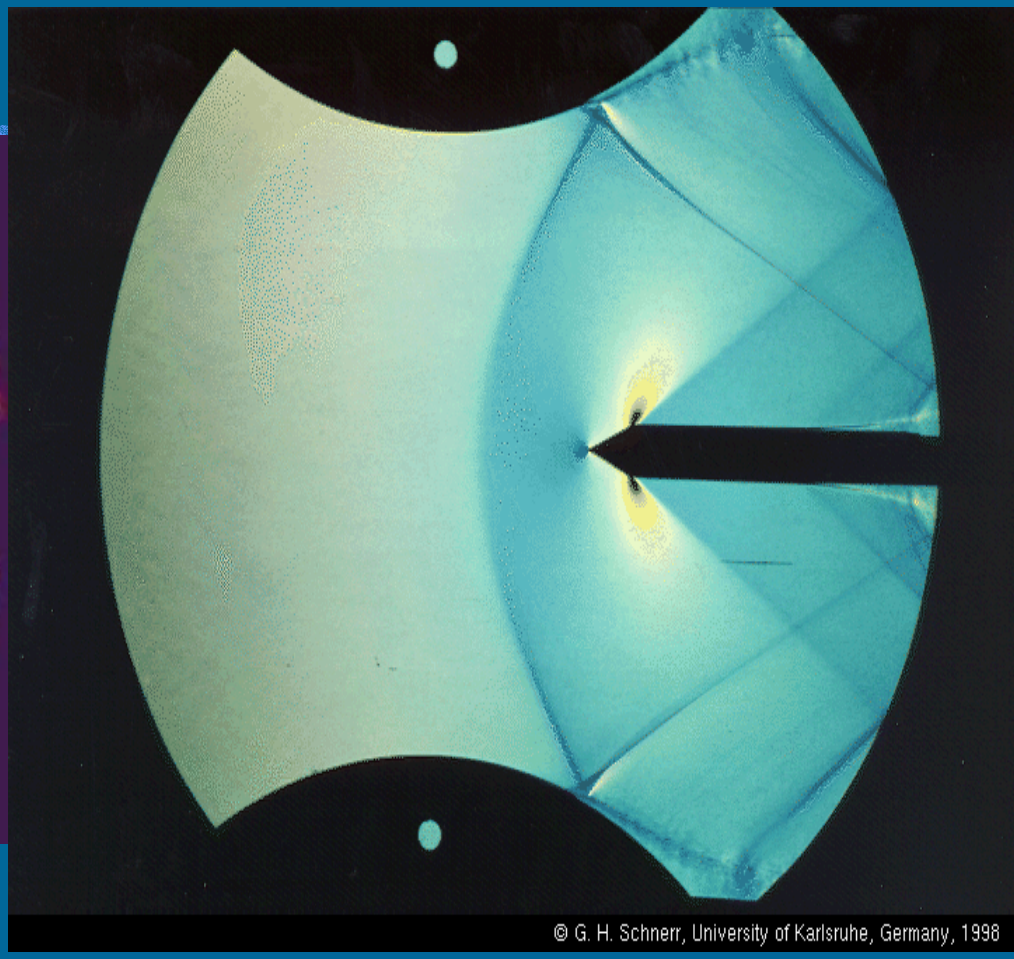
1- افت فشار زیاد است (رفتار موج ضربه ای قائم)

2- رفتار موج ضربه ای مایل را دارد.

امواج ضربه ای مایل علاوه بر روی گوه ها در گوشه ها نیز تشکیل میشوند .



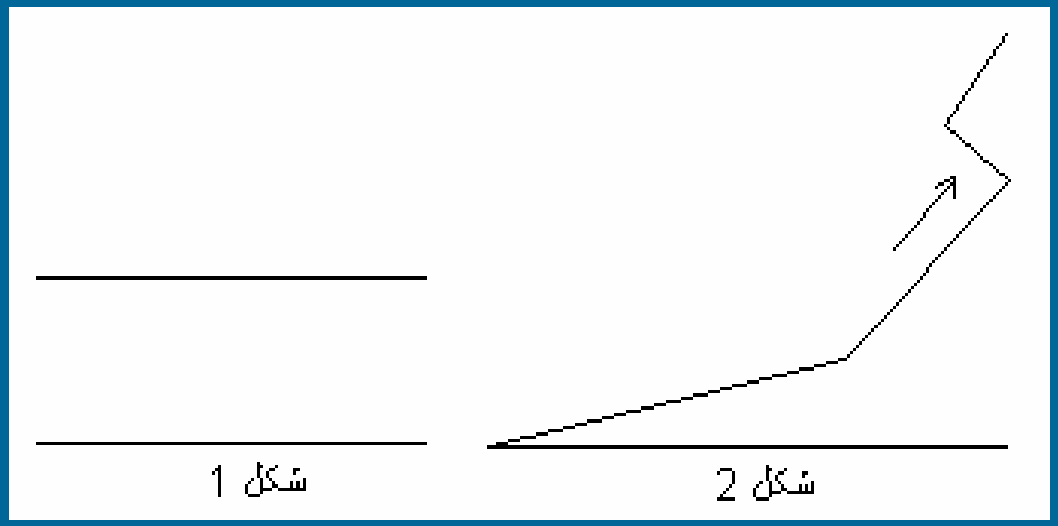




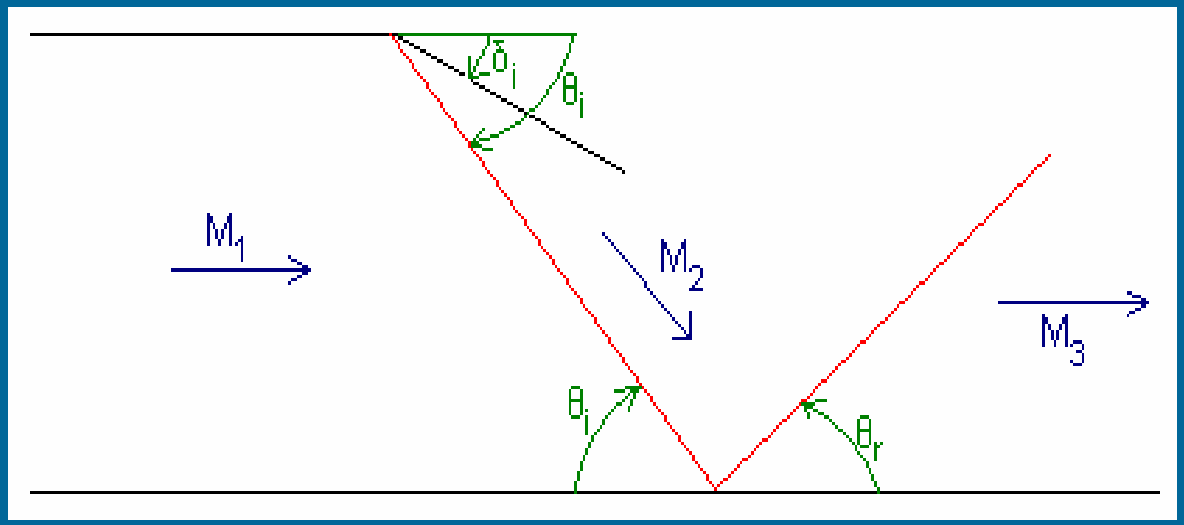
جریان ورودی به کمپرسور میتواند به دو صورت زیر باشد :

در حالت اول یک موج ضربه ای قائم در مقطع ورودی داریم که در آن نسبت فشار سکون زیاد است و مقدار زیادی انرژی تلف میشود .

در حالت دوم افت انرژی و فشار ورودی کمتر از حالت قبل است .

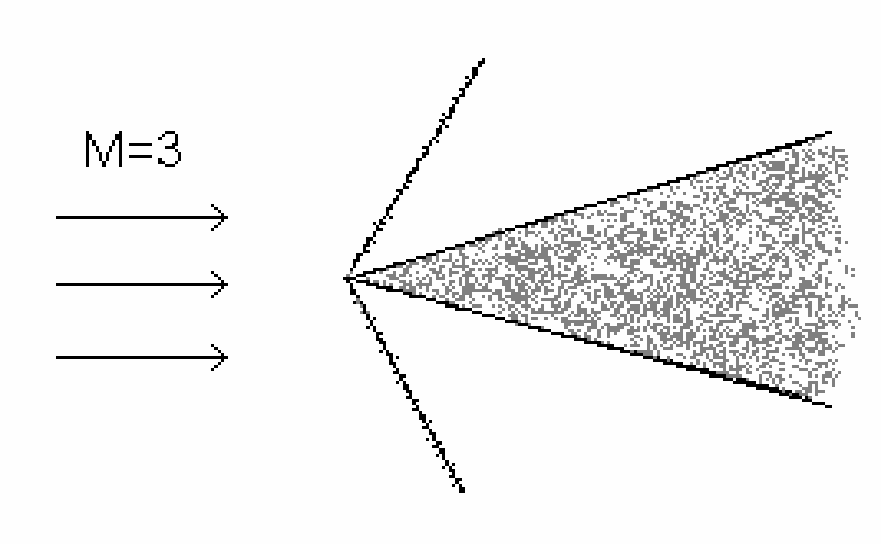


امواج انعکاسی : موج مایل پس از برخورد به یک صفحه مستقیم حرکت کرده و موج انعکاسی را تشکیل میدهد.



مساله 6 - 13 :

دیفیوزر فراصوتی دارای نوک تیزی است که نیم زاویه راس آن 5 درجه است. نوک تیز دیفیوزر، مطابق شکل در امتداد جریان قرار دارد. عدد ماخ جریان در امتداد سطح مخروطی و نیز فشار استاتیک وارد بر سطح مخروطی را حساب کنید. ارتفاع از زمین 5 کیلومتر است.



$$H = 5Km \xrightarrow{(8)} P_t = 54.05\,KPa$$

$$M = 3 \xrightarrow{(1-1)} \frac{P_1}{P_t} = 0.2722 \times 10^{-1} \Rightarrow P_1 = 1.4712\ KPa$$

$$\delta = 5^\circ, M_1 = 3 \xrightarrow{C3} \theta \approx 19.8$$

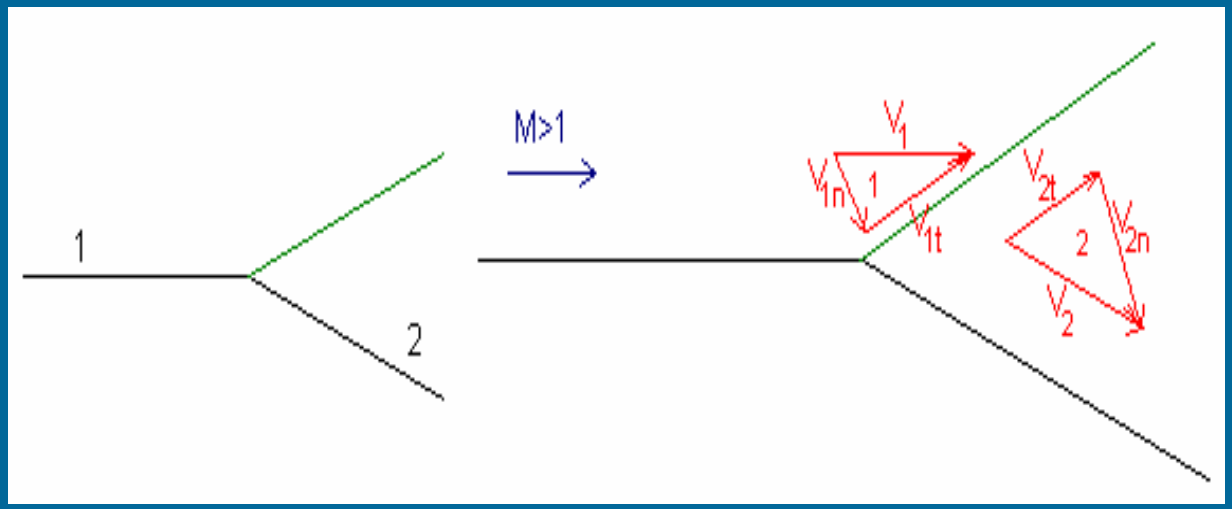
$$\delta = 5^\circ, M_1 = 3 \xrightarrow{C5} M_2 = 2.89$$

$$\delta = 5^\circ, M_1 = 3 \xrightarrow{C4} (P_c - P_1)/(1/2\wp P_1 M_1^2) = 0.13$$

$$\Rightarrow P_c = 0.13\left[1/2 \times 1.4 \times 3^2 + 1\right] \times 1.4712 = 1.3961$$

فصل هفتم : امواج پرانتل - مایر

اگر جریان مافوق صوت به یک گوشه محدب برخورد نماید با افزایش سطح روبرو میشود و امواج انبساطی ایجاد میشود.



قانون بقاي مومنتوم :

1- در جهت مماسي $V_{1t}=V_{2t}$

2- در جهت نرمال $P_1+\rho_1 V_{1n}^2=P_2+\rho_2 V_{2n}^2$

معادله پيوستگي :

$$\rho_1 A_1 V_{1n}=\rho_2 A_2 V_{2n}$$

$$\xrightarrow{A_1=A_2} \quad \rho_1 V_{1n}=\rho_2 V_{2n}$$

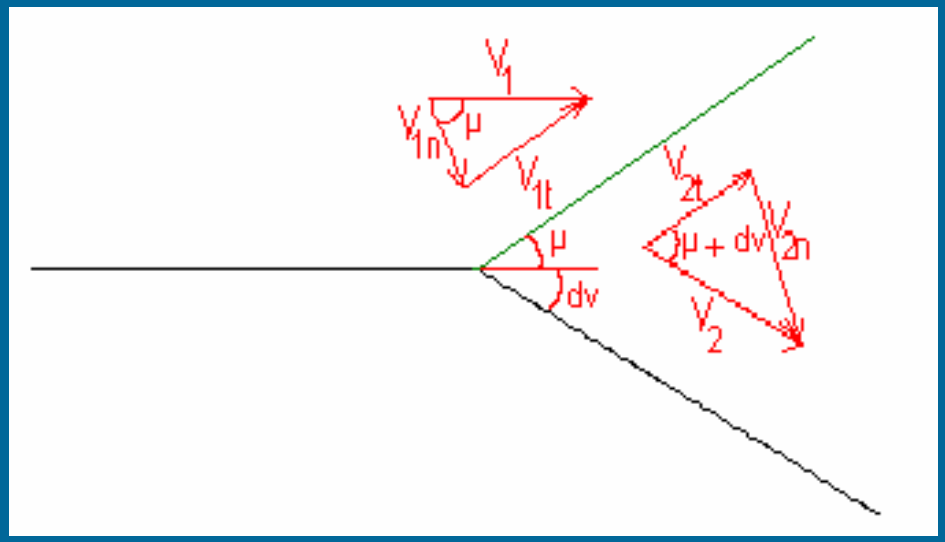
$$\Rightarrow \quad P_2-P_1=\rho_1 V_{1n}(V_{1n}-V_{2n})$$

$$\xrightarrow{V_2>V_1} \quad V_{2n}>V_{1n} \Rightarrow P_2<P_1$$

اگر انحرافهای آنی نداشته باشیم ، میتوانیم انحراف را به صورت گوشه هایی با انحراف کوچک در نظر بگیریم یا اینکه جریان مرحله مرحله منحرف میشود .یا انحراف تدریجی جریان دو مرحله داریم :

1- جریان آیزنتروپیک

2- جریان از موج ضربه ای مایل



و چون مماسی که مشتق گرفته شده از موج ضربه برابر بودند ، براي جهت نرمال داريم :

$$VCos\mu=(V+dV)Cos(\mu+dv) \xrightarrow{Cos(a+b)=CosaCosb-SinaSinb}$$

$$VCos\mu= VCos\mu VCos\mu+dvCos\mu-VSin\mu dv-dVSin\mu dv$$

$$\xrightarrow{(dv=0)\Rightarrow Cosdv=1,Sindv=dv} \quad Cos\mu dV=VSin\mu dv$$

$$\rightarrow \quad \frac{dV}{V}=\frac{Sin\mu}{Cos\mu}dv=\tan\mu dv \xrightarrow{\mu=Sin^{-1}(\frac{1}{M})}$$

$$Sin\mu=\frac{1}{M},Cos^2\mu=1-\frac{1}{M^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Sin^2\mu}{Cos^2\mu}=\tan^2\mu=\frac{\frac{1}{M^2}}{\frac{M^2-1}{M^2}}=\frac{1}{M^2-1}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\mu=\sqrt{\frac{1}{M^2-1}},\frac{dv}{v}\frac{1}{\sqrt{M^2-1}}dv$$

$$v = M\sqrt{\wp RT} \qquad (1) \qquad \xrightarrow{Ln} \qquad Lnv = LnM + Ln(\sqrt{RT}) + \frac{1}{2}LnT$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} + \frac{1}{2}\frac{dT}{T} \qquad (2)$$

$$adiabatic: \quad \Rightarrow \quad T_t = T(1 + \frac{\wp - 1}{2}M^2) = Cte$$

$$\xrightarrow{Ln} \qquad \frac{dT}{T} + \frac{(\wp - 1)MdM}{1 + \frac{\wp - 1}{2}M^2} = 0 \qquad (3)$$

$$(2),(3) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} - \frac{\frac{1}{2}(\wp - 1)MdM}{1 + \frac{\wp - 1}{2}M^2}$$

$$\rightarrow \qquad v - v_{ref} = [..]_{M_{ref}}^{M} \qquad \Rightarrow$$

$$v = \left[\sqrt{\frac{\wp + 1}{\wp - 1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\wp - 1}{\wp + 1}(M^2 - 1)} - \tan^{-1}\sqrt{M^2 - 1}\right]$$

نکته:در حین عبور جریان مافوق صوت از امواج انبساطی ، جریان آیزنتروپیک فرض میشود.

پس فشار سکونها و دمای سکونها برابرند و همان روابط جریان آیزنتروپیک برقرار است.

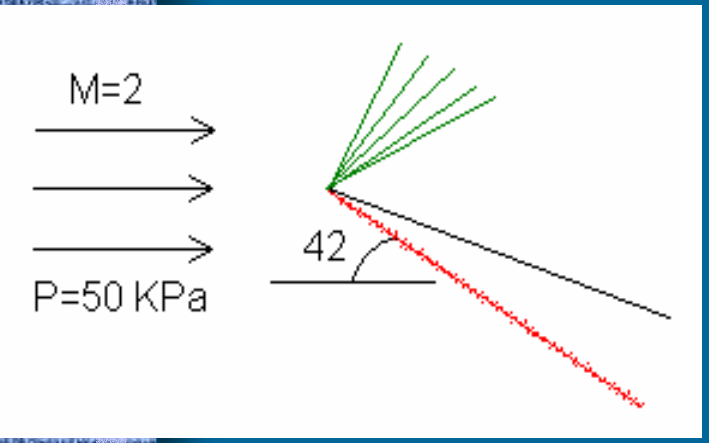
مساله 7 - 6 :

یک صفحه مسطح دو بعدی، با زاویه حمله مثبت در جریان هوایی با ماخ 2 قرار دارد. موج ضربه ای مایلی از لبه صفحه در زیر آن تشکیل میشود و با راستای جریان زاویه 42 درجه میسازد. در بالای صفحه، امواج انبساطی از لبه آن بوجود می آید.

الف) زاویه حمله صفحه چقدر است؟

ب) فشار وارد بر سطح زیرین صفحه چقدر است؟

پ) فشار وارد بر سطح بالایی صفحه چقدر است؟



$$\theta = 42^\circ, M_1 = 2 \xrightarrow{(3)} \delta = 12.5^\circ$$

$$\delta = 12.5, M_1 = 2 \rightarrow M_{2l} = 1.55$$

$$M_{1n} = M_1 Sin\ \theta = 1.33 \xrightarrow{(2)} \frac{P_2}{P_1} = 1.897 \rightarrow P_2 = 94.85 = P_l$$

$$M = 2 \rightarrow \nu_1 = 26.38 \Rightarrow \nu_2 = 26.38 + 12.5 = 38.88$$

$$\nu_2 = 38.88 \rightarrow M_{2u} = 2.49 \xrightarrow{(1-1)} \frac{P_2}{P_t} = 0.05945$$

$$M = 2 \xrightarrow{(1)} \frac{P_1}{P_t} = 0.1278$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_t} = \frac{0.05945}{0.1278} \rightarrow P_2 = 23.258 = P_u$$

فصل هشتم : کاربردهای موج مایل

1 – دیفیوزر فراصوت موج مایل

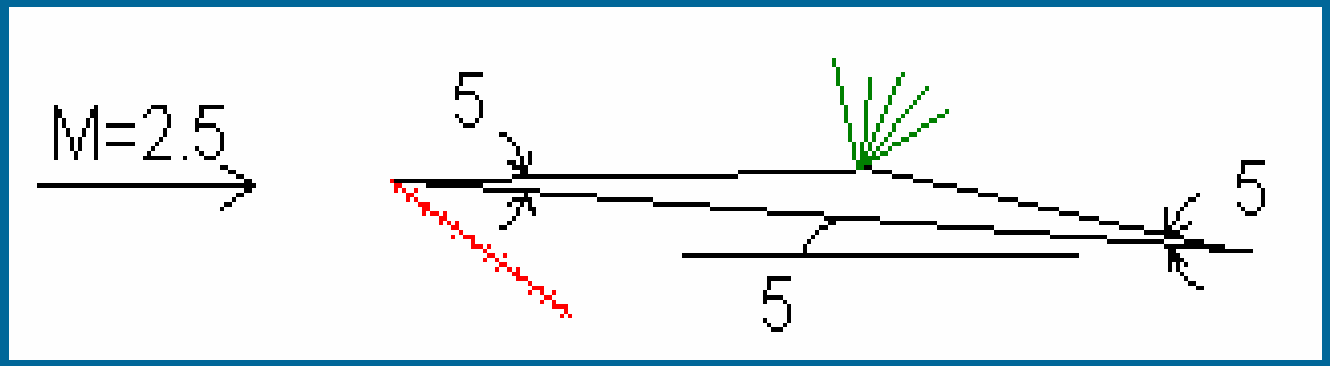
2 – شیپوره های فرو منبسط و فرا منبسط

3 – شیپوره توپی دار

4 – باله های فرا صوتی

مساله 8 - 11 :

ضریبهای برآ و پسا را برای باله فراصوت و متقارن شکل در زاویه حمله 5 درجه بدست آورید.



UP :

$$P_{u1} = P_\infty \Rightarrow \frac{P_{u1}}{P_{t1}} = \frac{P_\infty}{P_{t1}} = 0.05853$$

$$M_\infty = M_{u1} = 2.5 \xrightarrow{(4)} \nu_1 = 39.124 \rightarrow \nu_2 = 39.124 + 10 = 49.124$$

$$\nu_2 = 49.124 \rightarrow M_{u2} = 2.97 \xrightarrow{(1)} \frac{P_{u2}}{P_{t1}} = 0.02848$$

$$\rightarrow \frac{P_{u2}}{P_\infty} = \frac{P_{u2}}{P_{t1}} \frac{P_{t1}}{P_\infty} = 0.4865$$

LOW :

$$\delta = 5^\circ, M = 2.5 \xrightarrow{(3)} \theta = 30.5 \xrightarrow{M_{l1}=2.2} M_{n\infty} = 1.268 \xrightarrow{(2)} \frac{P_{l1}}{P_\infty} = 1.715$$

$$L = P_\infty C \left[\left(PL_1 \frac{1}{Cos\ 0} \right) Cos\ 5 - \left(P_{u1} \frac{0.5}{Cos\ 5} \right) Cos\ 0 - \left(P_{u2} \frac{0.5}{Cos\ 5} \right) Cos\ 10 \right]$$

$$\rightarrow L = P_\infty C \left[1.708 - 0.0293 - 0.2404 \right] = 1.438\ P_\infty C$$

$$D = P_\infty C \left[\left(PL_1 \frac{1}{Cos\ 0} \right) Sin\ 5 - \left(P_{u2} \frac{0.5}{Cos\ 5} \right) Sin\ 10 \right]$$

$$\rightarrow D = P_\infty C \left[0.149 - 0.042 \right] = 0.106\ P_\infty C$$

$$C_l = \frac{L}{1/2 \wp P_\infty M_\infty^2 C} = 0.328 \qquad C_D = \frac{D}{1/2 \wp P_\infty M_\infty^2 C} = 0.024$$

فصل نهم : جریان همراه با اصطکاک در داخل لوله ها

اگر یک جریان سیال تراکم پذیر در یک کانال با سطح مقطع معین برقرار باشد تنها عامل افزایش آنتروپی ، اصطکاک است .

در یک کانال میتوان جریان مادون صوت را به جریان صوتی رساند .

یک طول ماکزیمم برای یک ماخ ورودی با هندسه معین میتوان داشت که در آن طول ماخ برابر یک شود .

اگر جریان مافوق صوت را وارد لوله ای دارای اصطکاک نماییم ، طبق قانون دوم ترمودینامیک ماخ آن در طول لوله دائما کم میشود .

جریان گاز تراکم پذیر در مجاری همراه با اصطکاک(جریان خط فانو)

جریان همراه با اصطکاک در مجاری به سه دسته تقسیم میشود :

1- جریان همراه با اصطکاک در صورتیکه q”s=0 باشد .

2- جریان همراه با اصطکاک در صورتیکه دمای دیواره ثابت باشد .

3- جریان همراه با اصطکاک و با تغییرات سطح مقطع .

الف) جریان خط فانو : جریان سیال تراکم پذیر در لوله با مقطع ثابت در صورتیکه سیال آدیاباتیک باشد به جریان خط فانو معروف است .

برای جریان آدیاباتیک داخل لوله همواره آنتالپی سکون مقداری ثابت است .

معادله پیوستگی برای لوله با سطح مقطع ثابت : $\rho v = Cte \rightarrow \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$

در جریان همراه با اصطکاک داریم: $ds>0$

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad \rightarrow \quad Tds = d(u + \frac{p}{\rho}) - \frac{dp}{\rho}$$

$$\rightarrow \quad Tds = du + \frac{1}{\rho}dp - p\frac{d\rho}{\rho^2} - \frac{dp}{d\rho} \quad \rightarrow \quad ds = \frac{du}{T} - \frac{pd\rho}{T\rho^2}$$

$$\xrightarrow{P = \rho RT} \quad ds = \frac{du}{T} - \frac{R}{\rho}d\rho \quad \xrightarrow{du = C_v dT}$$

$$ds = C_v\frac{dT}{T} - R\frac{d\rho}{\rho} \quad \xrightarrow{\int} \quad s - s_1 = C_v Ln\frac{T}{T_1} - RLn\frac{\rho}{\rho_1}$$

$$\xrightarrow{\rho v = Cte} \quad s - s_1 = C_v Ln\frac{T}{T_1} + RLn\frac{v}{v_1}$$

$$adiabatic \quad \rightarrow \quad v=\sqrt{2(h_t-h)}$$

$$\xrightarrow{ideal} \quad v=\sqrt{2C_p(T_t-T)}$$

$$\frac{s-s_1}{C_v}=\frac{C_v}{C_v}Ln\frac{T}{T_1}+\frac{R}{C_v}Ln\left[\frac{2C_p(T_t-T)}{2C_p(T_t-T)}\right]^{1/2}$$

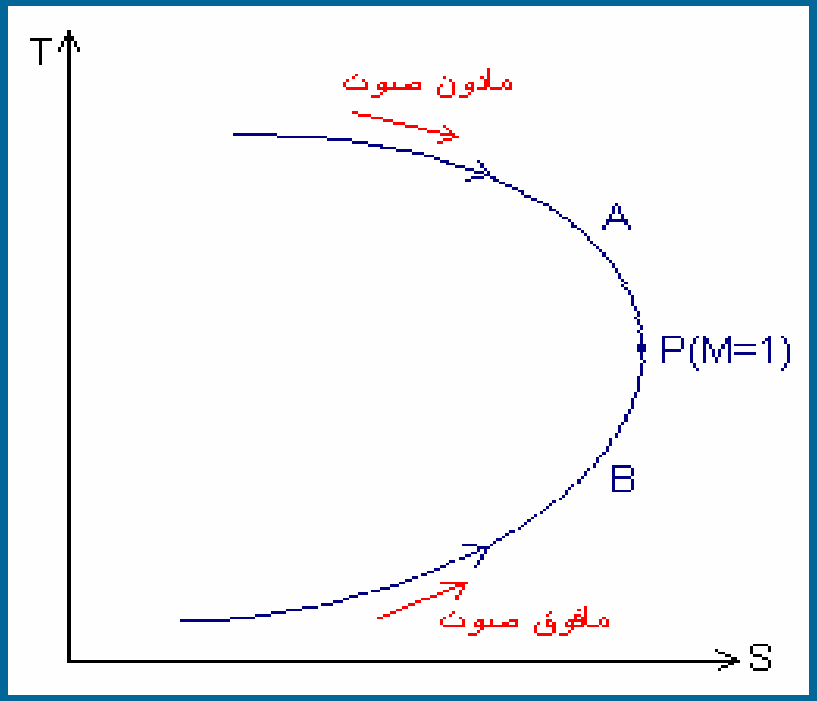
$$\xrightarrow{\frac{R}{C_v}=\wp-1} \quad \frac{s-s_1}{C_v}=Ln\frac{T}{T_1}+\frac{\wp-1}{2}Ln\frac{T_t-T}{T_t-T_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{s-s_1}{C_v}=LnT+\frac{\wp-1}{2}Ln(T_t-T)-\frac{\wp-1}{2}Ln(T_t-T_1)-LnT_1$$

$$\frac{s-s_1}{C_v}=LnT+\frac{\wp-1}{2}Ln(T_t-T)+Cte$$

آنتروپی تنها تابعی از پارامتر دما است .

این نمودار برای دبی ثابت رسم شده است ، حال اگر طول لوله از طول لازم برای ماخ یک بیشتر شود به شاخه پایینی میرویم .



برای بدست آوردن نقطه P از معادله خط فانو استفاده میکنیم .

$$\frac{ds}{dT}=0\Rightarrow\frac{d}{dT}\left(\frac{s}{C_v}\right)=\frac{1}{T}-\frac{\wp-1}{2(T_t-T)}=0\Rightarrow$$

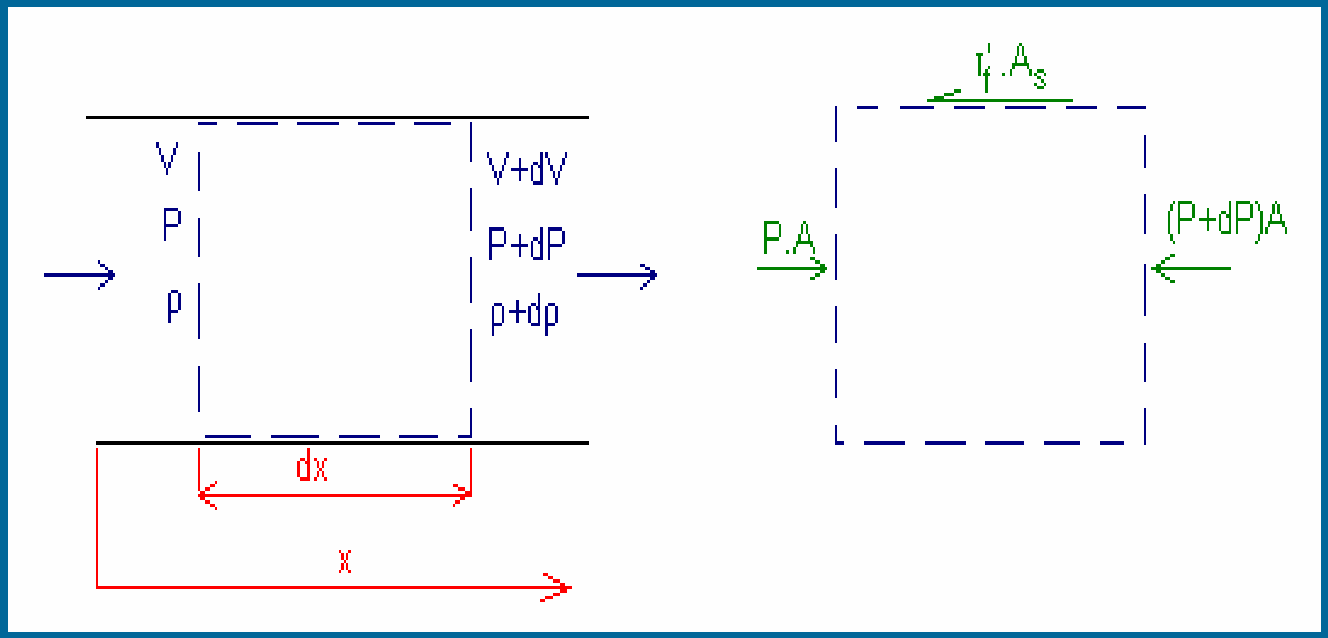
$$2(T_t-T)=T(\wp-1)\xrightarrow{C_p(T_t-T)=\frac{v^2}{2}}$$

$$2(T_t-T)=\frac{v^2}{C_p}=(\wp-1)T \qquad C_p(\wp-1)=R\wp$$

$$v^2=\wp RT=a^2\rightarrow\frac{v^2}{a^2}=1\rightarrow M^2=1\rightarrow M=1$$

پس در نقطه P شرایط صوتي برقرار است .

به دنبال این هستیم که روابطی بیابیم که بازای هر ماخ ، طولی ماکزیمم بیابیم که بازای آن طول Me=1 شود . ماخ ورودی میتواند بزرگتر از یک و یا کوچکتر از یک باشد . با در نظر گرفتن المان زیر روابط را مینویسیم :



$$\sum f_x = \iint_s v_x(\rho \vec{v} d\vec{A}) \quad \rightarrow \quad PA-(P+dP)A-\tau_f A_s = \rho A v(v+dv-v)$$

$$\Rightarrow \quad -AdP-\tau_f A_s = \rho A v\, dv$$

$$\xrightarrow{circle \rightarrow D_h = D,\ squre \rightarrow D_h = s} \quad -A_c dp-\tau_f dx\left(\frac{4A_c}{D_h}\right) = \rho A_c v\, dv \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{C_f = \frac{f}{4} = \frac{\tau_f}{\frac{1}{2}\rho v^2}} \quad \tau_f = \frac{f}{4}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) \quad \Rightarrow \quad -dp-\frac{1}{2}\rho v^2 f\frac{dx}{D} = \rho v\, dv$$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{p},\ p=\rho RT} \quad \frac{dp}{p}+\frac{1}{2}\gamma M^2 f\frac{dx}{D}+\gamma M^2\frac{dv}{v} = 0 \qquad (2)$$

$$P = \rho RT - LnP = LnR + Ln\rho + LnT \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho}+\frac{dT}{T} \quad [1]$$

$$\xrightarrow{\rho v = Cte} \quad Ln\rho + Lnv = Cte \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho}+\frac{dv}{v} = 0 \quad [2]$$

$$[1],[2] \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dv}{v}+\frac{dT}{T} \qquad (3)$$

$$M=\frac{v}{a}=\frac{1}{\sqrt{\wp R}}vT^{-1/2} \xrightarrow{\qquad\qquad} LnM=Lnv-\frac{1}{2}LnT+Ln(\frac{1}{\sqrt{R\wp}})$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dM}{M}=\frac{dv}{v}-\frac{1}{2}\frac{dT}{T} \qquad (4)$$

$$(3),(4) \qquad \Rightarrow \qquad dp=[-\frac{dM}{M}-\frac{1}{2}\frac{dT}{T}]+\frac{dT}{T} \qquad (5)$$

$$(5),(2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dT}{T}-\frac{1}{2}\frac{dT}{T}-\frac{dM}{M}+\frac{1}{2}\wp M^2 f\frac{dx}{D}+\wp M^2\frac{dM}{M}+\frac{1}{2}\wp M^2\frac{dT}{T}=0 \qquad (A)$$

$$adiabatic \qquad \xrightarrow{T(1+\frac{\wp-1}{2}M^2)=Cte} \qquad LnT+Ln(1+\frac{\wp-1}{2}M^2)=Ln(Cte)$$

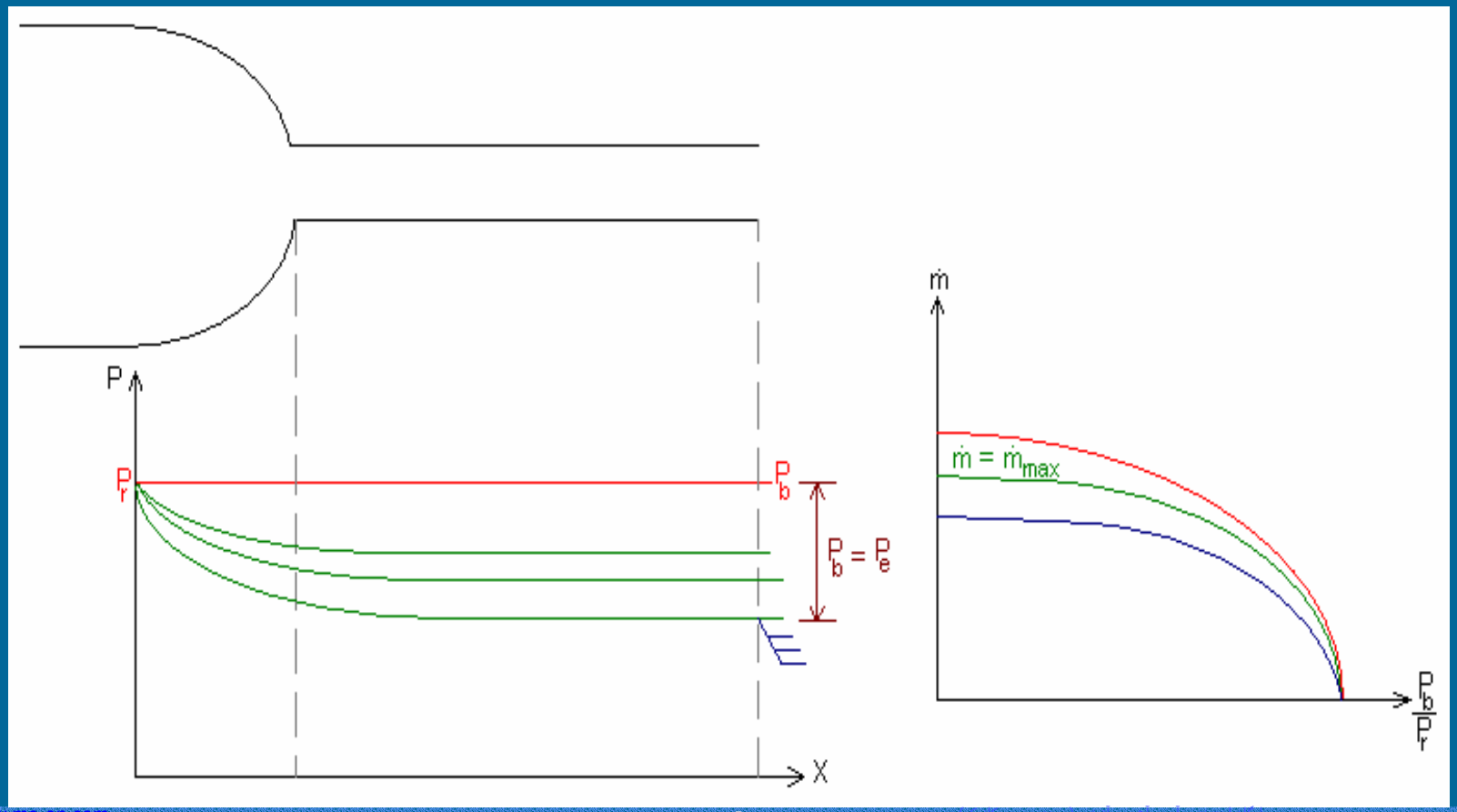
$$\Rightarrow \qquad \frac{dT}{T}+\frac{(\wp-1)M^2\frac{dM}{M}}{1+\frac{\wp-1}{2}M^2}=0 \qquad (B)$$

$$(B),(A) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(\wp-1)M^2\frac{dM}{M}}{\frac{\wp-1}{2}M^2}[\frac{1}{2}+\frac{\wp M^2}{2}]-(\wp M^2)\frac{dM}{M}=\frac{1}{2}\wp M^2 f\frac{d}{D}$$

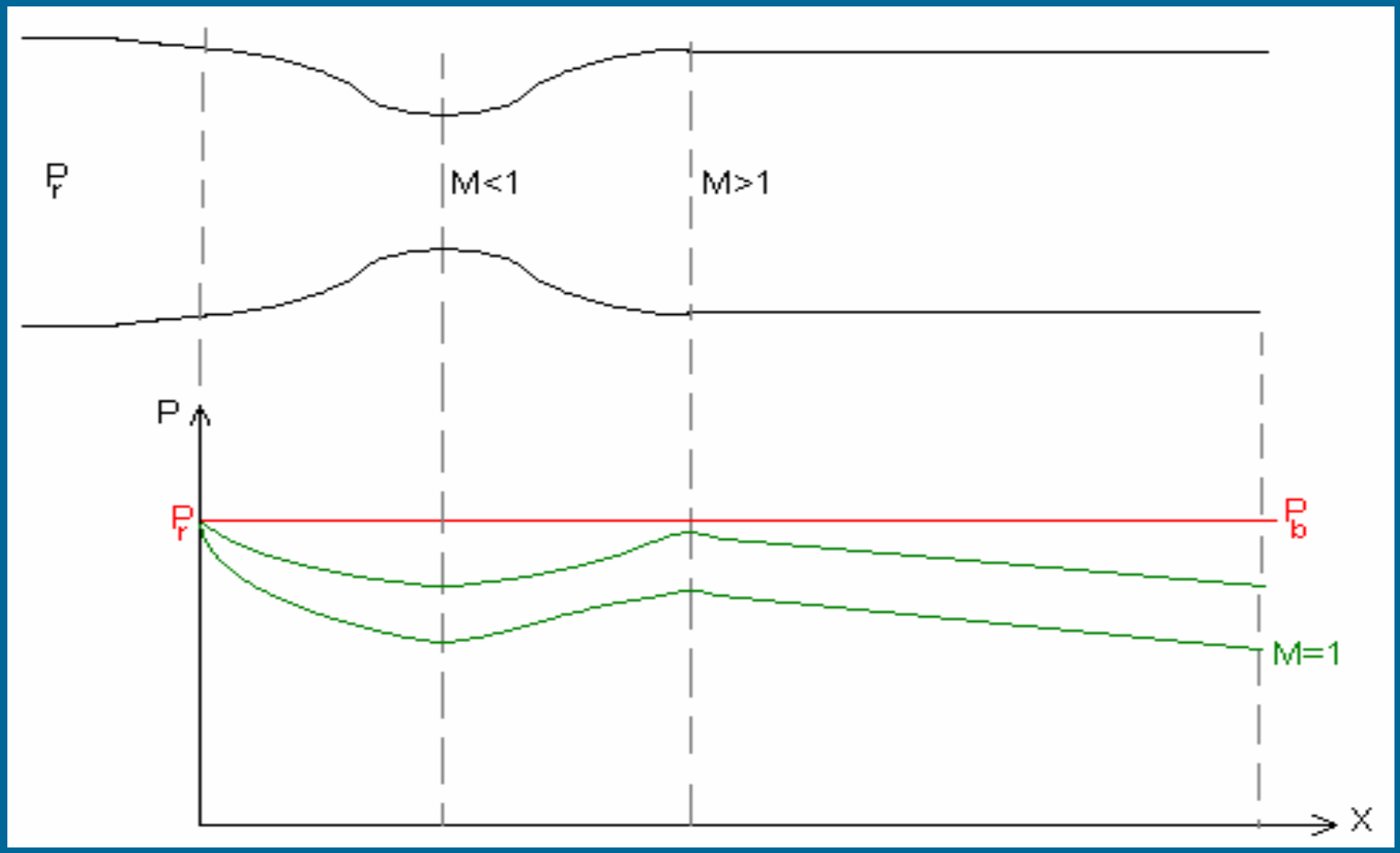
$$\Rightarrow \qquad \frac{fdx}{D}=\frac{2dM}{M}[\frac{1-M^2}{(1+\frac{\wp-1}{2}M^2)\wp M^2}] \qquad (C)$$

در پیوست 5 متغیرهای مورد نیاز ارایه شده است .

الف) تخلیه جریان از طریق لوله همراه با اصطکاک و شیپوره همگرا:



ب) تخلیه جریان از طریق لوله همراه با اصطکاک و شیپوره همگرا – واگرا :



جریان همراه با اصطکاک ، بصورت همد ما :

$$\dot{m} = \rho v A = Cte \xrightarrow{A = Cte} Ln\rho + LnA + Lnv = Ln(Cte)$$

$$\rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} = 0$$

$$\xrightarrow{dp + \rho v dv + \frac{1}{2}\rho v^2 \frac{fdx}{D} = 0} \quad \frac{dp}{p} + \frac{\wp M^2}{2}\frac{fdx}{D} + \wp M^2 \frac{dv}{v} = 0$$

$$dq = \dot{m} C_p dT_t \xrightarrow{p = \rho R T} \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \xrightarrow{dT = 0} \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho}$$

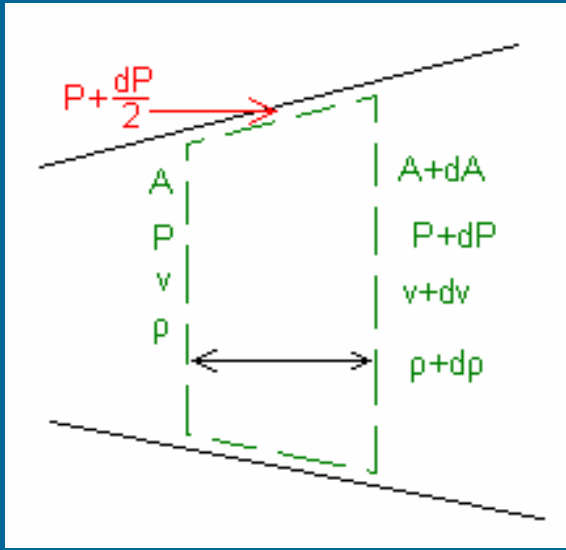
$$\xrightarrow{M=\frac{v}{a}} \qquad \frac{dM}{M}=\frac{dv}{v}\Rightarrow\frac{dp}{p}=-\frac{dM}{M}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{dM}{M}=\frac{fdx}{D}\frac{\wp M^2}{2}/(1-\wp M^2) \qquad (**)$$

$$critical \quad \rightarrow \quad \frac{dM}{dx}=\infty \quad \Rightarrow \quad 1-\wp M^2=0$$

$$\rightarrow \qquad M=\sqrt{\frac{1}{\wp}}$$

جریان همراه با اصطکاک ، آدیاباتیک ، همراه با تغییرسطح مقطع :



$$\rho v A = Cte$$

$$\Sigma f_x = \iint_s v_x (\rho \vec{v}\, d\vec{A})$$

$$pA + (p + \frac{dp}{2}) dA - (p + dp)(A + dA) - \tau_f A_s = \rho A v dv$$

$$\begin{cases} -A\,dp - \tau_f dx \frac{4A}{D} = \rho A v dv \\ -dp - \frac{1}{2}\rho v^2 f \frac{dx}{D} = \rho v dv \end{cases} \longrightarrow \quad -A dp - \frac{1}{2}\rho v^2 \frac{f A_s}{4} = \rho A v dv$$

$$circle \quad \rightarrow \quad dp + \frac{1}{2}\rho v^2 \frac{f dx}{D} + \rho v dv = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-dA}{A} - \frac{dv}{v} + \frac{dT}{T} + \wp M^2 \frac{dv}{v} + \frac{1}{2} M^2 \frac{f dx}{D} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}\wp M^2 \frac{f}{D} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dx} + \frac{dM}{dx}\frac{(1 - M^2)M}{1 + \frac{\wp - 1}{2} M^2}$$